

Kaplas : des chutes édifiantes

Auteurs : COUZIER Juliette - GOURRIN Arthur – COUSTURIAN Louis

Encadrés par : Monsieur Ducassou et Monsieur Torrens

Lycée Bertran de Born, Périgueux

ANNEXES

1. COEFFICIENT DE FROTTEMENT SOLIDE

Nous cherchons à déterminer le coefficient de frottement de glissement f d'un kapla sur un autre kapla. Le coefficient de frottement va nous être utile pour la suite car il caractérise la force de frottement et il dépend surtout du type de matériau en contact (ici bois contre bois).

Lorsque une force \vec{F} s'applique au système parallèle au plan de contact entre le système et un autre objet, des frottements vont intervenir et compenser cette force si $\|\vec{F}\| \leq f \cdot \|\vec{N}\|$ avec \vec{N} la composante normale de la réaction du support de l'objet sur le système sinon, la force de frottement a pour norme $f \cdot \|\vec{N}\|$. (9) Pour déterminer ce coefficient f , nous disposons un kapla (1) en orange sur le schéma sur un autre kapla fixe (2) que nous inclinons progressivement. Lorsque le kapla 1 commence à glisser, nous notons l'angle α formé entre l'horizontale et le kapla 2. Le schéma ci-dessous représente la situation :

L'angle moyen obtenu est de 55° avec un écart type de 4° pour 10 mesures (dans le cas d'un kapla posé sur la face).

Interprétation du phénomène et détermination du coefficient de frottement.

Le système {kapla} est à l'équilibre donc son centre d'inertie est immobile dans le référentiel terrestre que nous supposons galiléen pour notre étude. Ainsi, d'après le principe d'inertie, le système est pseudo-isolé. De ce fait la résultante des forces qui s'applique sur celui-ci est nulle :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = \vec{0}$$

Et donc en projetant ces relations suivant les axes Ox et Oy

$$Px + Nx + Tx = 0$$

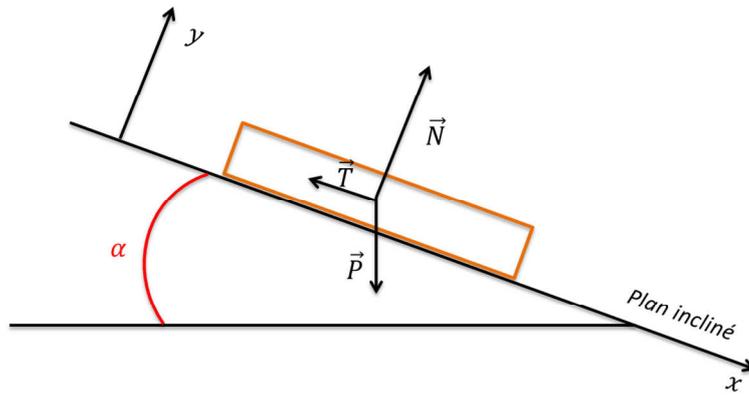


Figure 1 : Schéma représentant les forces qui s'exercent sur le kapla orange

$$P_y + N_y + T_y = 0$$

Or en utilisant l'angle α nous avons donc les coordonnées suivantes pour les vecteurs :

$$\vec{P} \begin{pmatrix} mg \cdot \sin(\alpha) \\ -mg \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \vec{N} \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}, \quad \vec{T} \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $mg \cdot \sin \alpha + 0 - T = 0 \Leftrightarrow T = mg \cdot \sin \alpha$ et $-mg \cdot \cos \alpha + N + 0 = 0 \Leftrightarrow N = mg \cdot \cos \alpha$

Nous savons que : $T = fN$ car le kapla est sur le point de tomber.

$$\text{Nous en déduisons que } f = \frac{T}{N} = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{mg \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

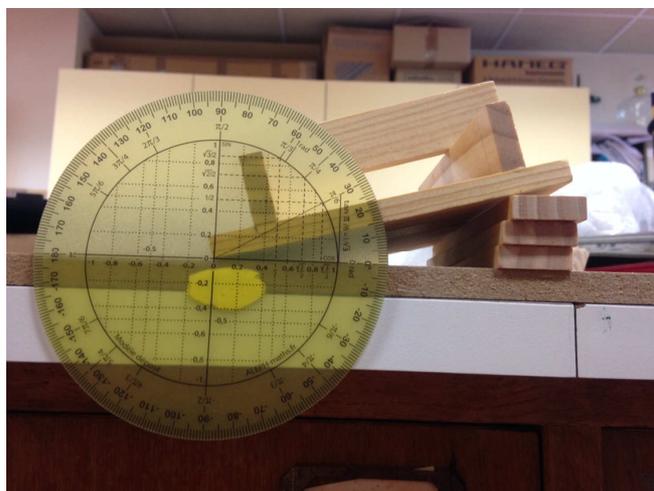


Figure 2 : Calcul pratique du coefficient de frottements

2. CALCUL DE LA DUREE DE STABILITE D'UNE TOUR

Nous allons dans ce paragraphe prévoir la durée de chute d'une tour en ayant l'accélération de la plaque. Nous savons que dans notre modèle, ce sont les vibreurs qui font bouger la tour. Les frottements des kaplas entre eux entraînent un déplacement des kaplas par rapport à la tour. Quand l'un des kaplas ne repose sur rien, ou si le centre de gravité de la tour n'est plus dans sa surface de sustentation alors la tour chute. Dans la réalité, les séismes vont déplacer et déformer le bâtiment s'il n'est pas parasismique et cela peut entraîner la rupture des matériaux du bâtiment aux points de fragilité et donc sa chute.

Les frottements auxquels notre tour est confronté ici sont des frottements kapla contre kapla soit bois contre bois. Dans le référentiel terrestre, le vibreur horizontal entraîne le système {plaque + tour} dans la direction de la droite vers la gauche, le système subit une force \vec{R} de direction horizontale et de sens vers la droite (ou vers la gauche mais dans ce cas, cette force serait due aux ressorts fixés sous la plaque), nous négligerons les déplacements verticaux du système dus au vibreur inférieur. Afin de simplifier notre système nous avons choisi de fixer le premier étage de la tour sur la plaque support.

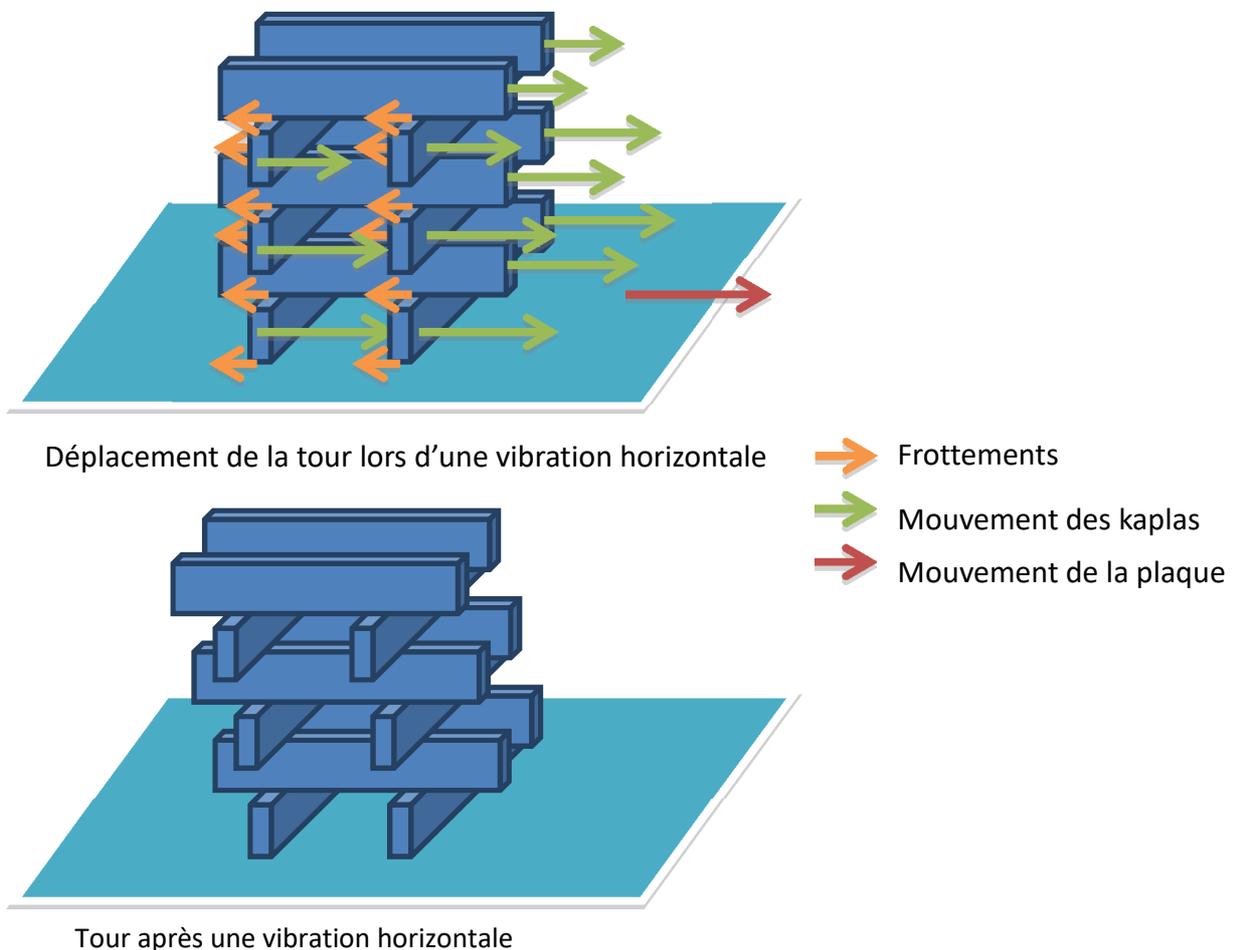


Figure 3 : Schéma représentant les déplacements des kaplas d'une tour lors d'une vibration horizontale

La force de frottement \vec{F} entre les kaplas les plus bas et ceux au dessus à pour norme maximale $\|\vec{F}\| \leq f \cdot \|\vec{N}\|$ avec f le coefficient de frottement qui dépend des solides qui sont en contact et \vec{N} la force de réaction du support. La plaque vibrante n'étant pas inclinée, nous avons $\vec{N} = -\vec{P}$ où \vec{P} est le poids du système étudié. En effet, le

système ne subit pas d'autres forces verticales et il est immobile verticalement. Nous en déduisons que $\|\vec{F}\| \leq f \cdot m_{tour}g$ avec m_{tour} la masse de la tour sans les deux kaplas du bas et g la constante de gravitation terrestre.

En effet, si une force \vec{K} s'applique à un système en contact avec un support dont le coefficient de frottement entre le système et le support est f et avec une réaction du support qui vaut \vec{N} alors si $\|\vec{K}\| \leq f \cdot \|\vec{N}\|$, une force de frottement du solide sur le système dit frottement statique viendra s'opposer à \vec{K} (même direction, même norme mais sens opposé), sinon si $\|\vec{K}\| > f \cdot \|\vec{N}\|$ alors une force de frottements (dits dynamiques) de norme $f \cdot \|\vec{N}\|$ et de sens opposé mais de direction identique à \vec{K} s'appliquerait au système. (9)

Vu que : $\|\vec{N}\| = m_{tour} \cdot g$, nous en déduisons que :

- si $\|\vec{R}\| \leq f m_{tour}g$ alors la tour ne se déplacerait pas, les frottements s'opposant à la force \vec{R} du vibreur et la réaction du support s'opposant au poids de la tour

- si $\|\vec{R}\| > f m_{tour}g$ alors la tour se déplacerait et la somme des forces s'appliquant sur la tour serait alors de $\vec{R} - \vec{F}$ la réaction du support s'opposant au poids de la tour, cette somme des forces serait horizontale, vers la droite et d'intensité $\|\vec{R}\| - \|\vec{F}\| = \|\vec{R}\| - f \cdot m_{tour} \cdot g$.

Le système {tour} subit son poids \vec{P} de direction vers le bas et d'intensité $\|\vec{P}\| = m_{tour} \cdot g$, la force du vibreur \vec{R} , horizontale et vers la droite, la réaction du support que nous pouvons décomposer avec sa composante tangentielle qui est la force de frottement \vec{F} de direction horizontale et de sens vers la gauche et sa composante normale \vec{N} . Vu que $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ (principe fondamental de la dynamique), nous en déduisons que $\|\vec{P}\| = \|\vec{N}\|$ car ce sont les seules forces qui ont une direction verticale et qui sont opposées car \vec{a} est de direction horizontale. Ainsi,

$$\sum \vec{F}_{ext\ tour} = \vec{R} + \vec{F} = m_{tour} \cdot \vec{a}_{tour} \Leftrightarrow \vec{a}_{tour} = \frac{\vec{R} + \vec{F}}{m_{tour}} \quad (1).$$

Or nous n'avons que l'accélération du système {plaque + tour} et pas celle du système {tour}. Nous savons que le système {tour + plaque} subit son poids $\vec{P}_{plaque+tour}$ de direction verticale, de sens vers le bas et d'intensité $\|\vec{P}_{tour+plaque}\| = m_{tour+plaque} \cdot g$, la réaction du support en béton de direction verticale et vers le haut et la force du vibreur, \vec{R} de direction horizontale et vers la droite. Le système n'est en mouvement que de manière horizontale donc les forces de direction verticale s'annulent. Nous en déduisons que $\sum \vec{F}_{ext\ tour+plaque} = \vec{R} = m_{tour+plaque} \cdot \vec{a}_{tour+plaque}$.

Si $\|\vec{R}\| \leq f m_{tour}g$ nous savons que $\vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}_{tour} = \vec{0}$ sinon, alors $\|\vec{R} + \vec{F}\| = \|\vec{R}\| - \|\vec{F}\| = \|\vec{R}\| - f m_{tour}g$.

Ainsi en reprenant l'égalité (1), et en raisonnant avec les normes et avec $|a_1(t)| = \|\vec{a}_{tour+plaque}\|$ et $|a_2(t)| = \|\vec{a}_{tour}\|$, nous savons que si $m_{tour+plaque} \cdot |a_1(t)| \leq f m_{tour}g \Leftrightarrow |a_1(t)| \leq \frac{f m_{tour}g}{m_{tour+plaque}}$ alors $|a_2(t)| = 0$ et sinon

$$|a_2(t)| = \frac{m_{tour+plaque} \cdot |a_1(t)| - f m_{tour}g}{m_{tour}}.$$

Nous pouvons ainsi obtenir $|a_2(t)|$ grâce à $|a_1(t)|$, m_{tour} , m_{plaque} , f coefficient de frottement kapla sur kapla et une fonction définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} |a_2(t)| = 0 \text{ si } |a_1(t)| \leq \frac{f m_{tour}g}{m_{tour+plaque}} \\ |a_2(t)| = \frac{m_{tour+plaque} \cdot |a_1(t)| - f m_{tour}g}{m_{tour}} \text{ si } |a_1(t)| > \frac{f m_{tour}g}{m_{tour+plaque}} \end{array} \right.$$

La vitesse à un instant t de la tour $|v(t)|$ vaut $|v(t)| = \int_0^t |a_1(t)|$ car nous considérons t_0 comme le temps avant la mise en route du vibreur donc avec une vitesse initiale nulle. En raisonnant de la même manière avec la vitesse $|v(t)|$ que nous avons obtenue, nous pouvons en déduire que la position de la tour $|x(t)|$ vaut $|x(t)| = \int_0^t |v(t)| = \iint_0^t |a_1(t)|$.

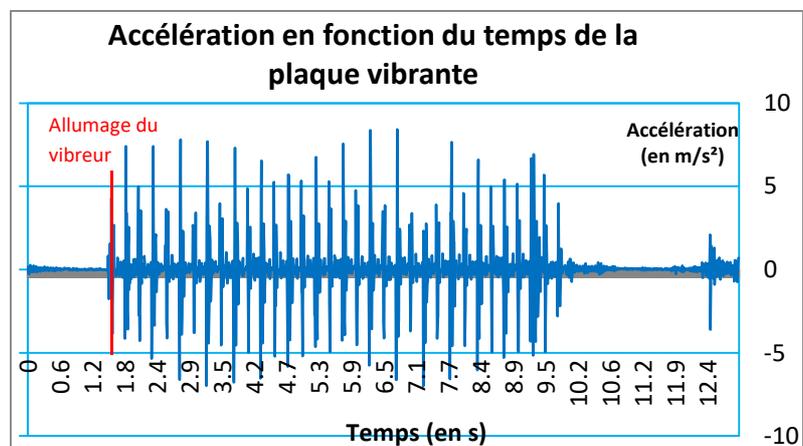
À partir du moment où $|x(t)|$ dépasse la largeur d'une kapla, cela signifie que la tour s'est trop déplacée et donc que le kapla le plus bas ne repose plus sur rien. La tour est alors en train de tomber...

On ne considère pas le mouvement des ressorts qui vont provoquer l'apparition d'une force dans l'autre sens que va subir la plaque et la tour et va retarder la chute de la tour en la déplaçant dans l'autre sens... Il faudrait alors que l'accélération mesurée puisse être algébrique en fonction du sens de la force qui s'applique à la tour (positive si la force est celle du vibreur de la gauche vers la droite et négative si c'est celle des ressorts). En réappliquant les formules plus haut, on a alors bien la bonne distance de déplacement.

Nous avons construit une tour et fixé un accéléromètre sur le dessous afin de connaître l'accélération de la plaque vibrante et d'en déduire celle de la tour à tout instant afin d'obtenir son déplacement.



Figure 4 : Photographie de la méthode permettant de calculer la chute d'une tour de 200g



Après avoir enlevé les valeurs pour lesquelles $a_1(t) \leq \frac{f m_{tour} g}{m_{tour} + m_{plaque}}$ et après avoir intégré deux fois ces valeurs, on obtient ce graphique du déplacement de la tour :

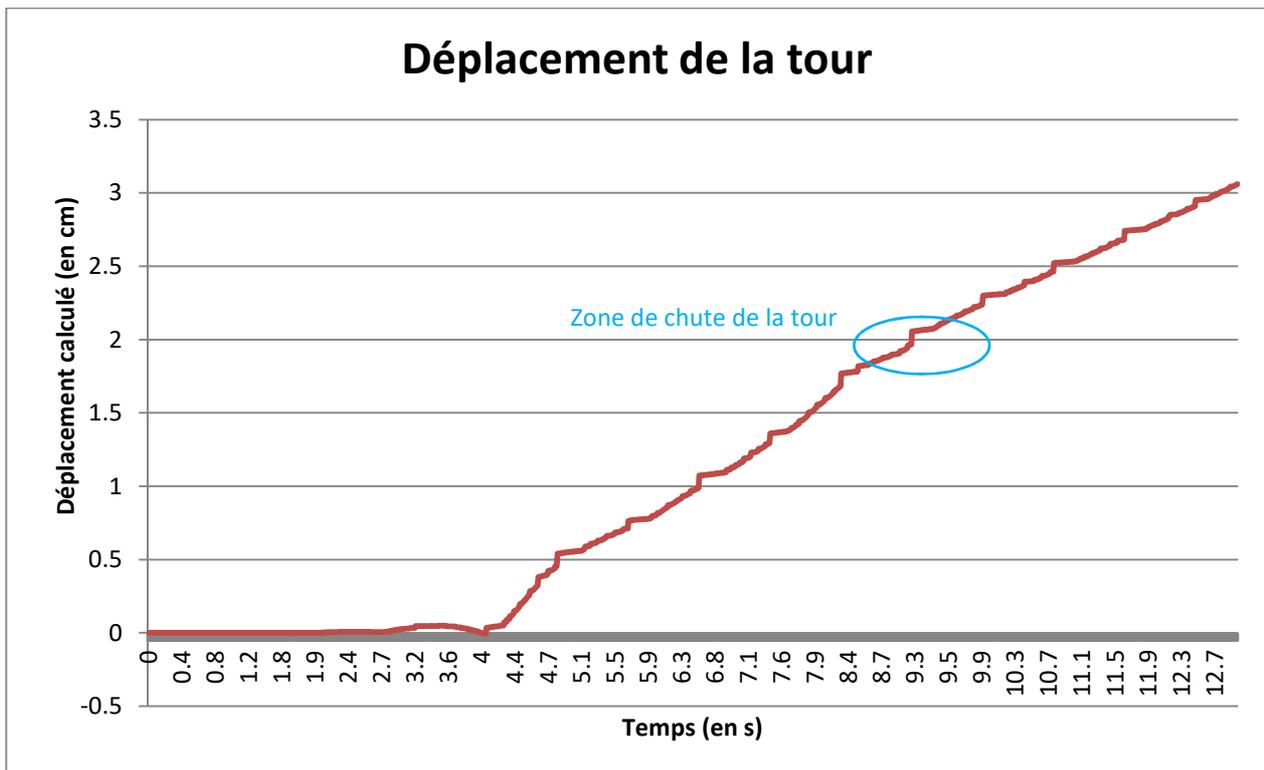


Figure 5 : Evolution du déplacement de la tour dans le temps

La tour se met à chuter au moment où le déplacement de celle-ci est supérieur à 2,0 cm, car le premier kapla non fixé à la plaque est dans nos constructions à 2,0 cm du vide. Nous obtenons alors dans la théorie un temps de chute de 7,6 secondes (en effet, le vibreur ne s'est déclenché qu'à $t = 1,5$ s) pour une tour de 200 g alors qu'il est de 8,0 secondes dans la réalité. En répétant deux fois l'expérience, nous nous rendons compte que les calculs théoriques concordent avec la pratique.