

BERRY Yann  
GOUTAY Corentin  
MICHON Bruno

# LE CHAOTIQUEUR

Olympiades de la physique

Professeur coordonnateur :  
Philippe Jeanjacquot

Année 2006

# SOMMAIRE

- PREFACE DU PROFESSEUR COORDONATEUR
- INTRODUCTION
- PRESENTATION DU CHAOS
  - I. Historique
  - II. Définition du chaos et ses différents aspects
    - a. La dépendance aux conditions initiales
    - b. La non périodicité d'un mouvement chaotique
- UN SYSTEME CHAOTIQUE : LE DOUBLE PENDULE
  - I. Système choisi
    - a. Choix du système
    - b. Analyse fonctionnelle
  - II. Analyse des mouvements du système, acquisition vidéo.
    - a. Récolte
    - b. Interprétations
    - c. Conclusions
    - d. Problèmes d'incertitudes
  - III. Acquisitions avec une photodiode
    - a. La photodiode
    - b. Protocole d'expérimentation
    - c. Les mesures
    - d. Modification du montage
    - e. La calibration et les mesures associées
- CONCLUSION
- GLOSSAIRE
- SOURCES

# PREFACE PAR LE PROFESSEUR COORDONNATEUR.

Voici quelques précisions avant la lecture du dossier sur le *Chaotiqueur*.

Depuis 10 ans j'encadre différents groupes qui préparent et présentent des projets expérimentaux. Nous avons abordé de nombreux domaines : aurores polaires, maison autonome, expansion de l'univers, rayons cosmiques, épuration de l'eau, microscope à force atomique, les gyroscopes. Au total il y a eu 22 groupes. Actuellement, deux groupes travaillent sur des thèmes complètement différents le *BH2* et le *Chaotiqueur*.

Le but de ce projet est de réaliser une expérience simple et exploitable en lycée. Le chaos est présent dans beaucoup de phénomènes dans des domaines qui vont de l'économie à la météorologie en passant par la biologie et la physique.

L'expérience que nous avons choisie est un pendule double. Lorsque celui-ci oscille avec une grande amplitude ces mouvements sont complètement chaotiques. Pourtant, c'est un montage très simple, son comportement suit les lois de la physique, il a un comportement déterministe. Mais un écart, non mesurable, des conditions initiales modifie complètement ce comportement, il est imprévisible.

Pour suivre de façon simple ce comportement, nous avons monté deux pendules doubles en parallèle. Nous avons aussi testé différents systèmes de mesure. Le but étant d'être le moins cher et le plus reproductible possible.

Nous remercions Monsieur MI ZONY, directeur de l'IREM de Lyon pour sa disponibilité et son aide précieuse sur les mathématiques du chaos. Nous remercions également Monsieur Bergmann, inspecteur général groupe STI, pour ses nombreux éclairages sur la définition du chaos.

Bonne lecture.

# INTRODUCTION

La physique moderne s'essouffle : elle rencontre dans ses recherches de plus en plus de problèmes, qui sont à chaque fois plus complexes.

Une explication à ce problème porte le nom de « théorie du chaos ». Nous allons donc tenter de voir en quoi cette vaste et nouvelle théorie consiste.

Nous avons mis au point une expérience permettant d'étudier les mouvements chaotiques et de répondre à la problématique suivante : S'initier à la théorie du chaos à l'aide d'un système simple accessible pour des élèves de lycée.

Il est impératif de retenir les deux aspects suivants :

- Déterministes, car ils obéissent aux lois de la physique (ici les lois de Newton).
- Imprévisibles, car une variation infime et incontrôlable des conditions initiales modifient complètement leur comportement.

Les phénomènes chaotiques sont omniprésents dans la vie courante et dans beaucoup de domaines : physique, mathématiques, hydrodynamique, économie, démographie, météorologie ...

Cependant l'idée globale est que l'on appréhende désormais les systèmes dans leur globalité et non dans leurs éléments constitutifs : on parlera alors de science holistique au lieu du réductionnisme.

# PRESENTATION

Newton, grâce à ses équations, disait qu'il était possible de connaître le passé, le présent et le futur. Ce qui n'est malheureusement pas vrai pour les systèmes très petits : c'est la mécanique quantique ; et pour les systèmes complexes : c'est la théorie du chaos.

On attribue la première étude du chaos au météorologue Edward Lorenz (1960-1970). En fait c'est le mathématicien français Henri Poincaré qui, il y a un siècle, a lancé la notion de chaos.

## I. Historique

Isaac Newton (1642 - 1727) a établi, entre autre, les trois lois de Newton (principe d'inertie, variation du vecteur vitesse du centre d'inertie, principe d'interaction), la loi de la gravitation universelle et la physique déterministe classique. Les équations de ce dernier devaient permettre de connaître l'état d'un système dans un temps passé, présent ou futur.

Par ailleurs, on sait, grâce à la physique quantique qu'il est impossible de connaître précisément à la fois la position et la vitesse d'une particule à un moment donné (Werner Heisenberg (1901 - 1976)). Cette incertitude remet alors en question la conception déterministe.

Ces nouvelles données nous conduisent ainsi à une approche plus statistique du monde.

Henri Poincaré (1854 - 1912), un des plus grand mathématicien de son temps, fut aussi l'un des pionniers de la théorie du chaos. C'est en étudiant le système des trois corps (système où l'on prend en considération trois corps {Terre, Soleil, Lune} au lieu de deux comme nous le faisons au lycée et où la lois d'attraction gravitationnelle existe) qu'il comprit le premier que l'évolution de certains systèmes dynamiques dépend de manière tellement sensible aux conditions initiales qu'il devient parfois (à partir de trois corps) impossible de prédire l'état d'un système en un temps donné. Il sentit donc que le chaos résidait dans le cœur même des équations pourtant déterministes de Newton.

Enfin en 1970 le phénomène commence véritablement son « entrée sur scène ».

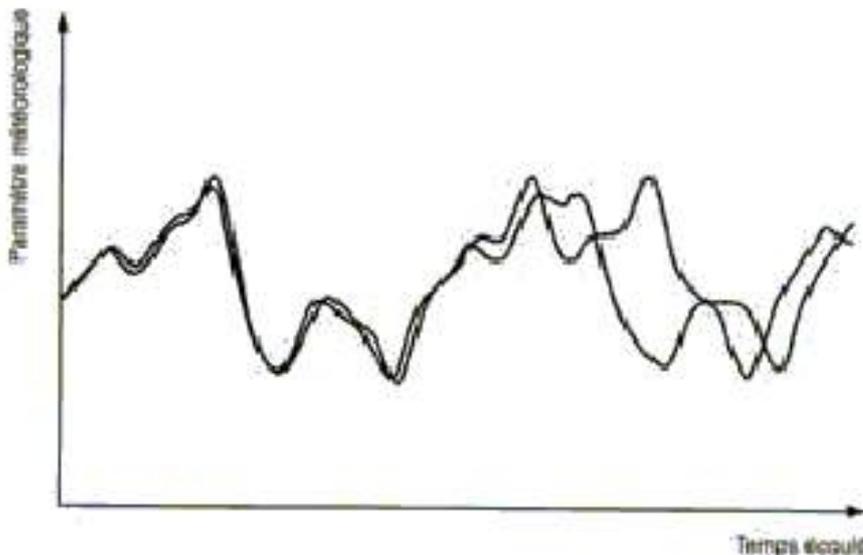
## II. Définition du chaos et ses différents aspects

Poincaré avait déjà prédit le côté imprévisible de certains systèmes : « Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. ».

Il y a deux façons d'identifier un comportement chaotique.

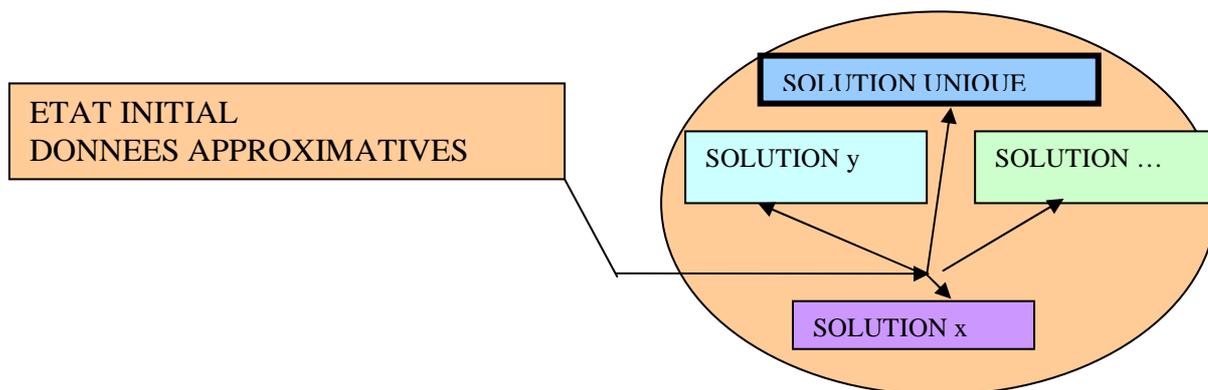
### a) La dépendance aux conditions initiales

- Un système chaotique est caractérisé par sa dépendance aux conditions initiales. Edward Lorenz a prouvé qu'une infime variation ou imprécision dans les conditions initiales menait à des prévisions météorologiques complètement opposées au bout d'un certain temps (de nos jours on arrive à faire des prévisions sur 8 jours mais au-delà de ce délai nous sommes incapable de certifier nos résultats).



- La divergence des deux courbes calculées par Lorenz (présentées ci-dessus) est due à une différence sur la 4<sup>ème</sup> décimale des conditions initiales.
- Cette dernière variation est plus connue sous le nom commun d'effet papillon : un battement d'aile de papillon peut provoquer quelques milliers de kilomètres plus loin un ouragan. A savoir que les divergences s'accroissent exponentiellement au cours du temps (ce qui sera à vérifier à l'aide de notre expérience).

Pour un système quelconque il n'y a qu'une solution. Mais si on a des données initiales approximatives on obtiendra des solutions multiples (voir le schéma ci-dessous).



Il suffit souvent que l'écart soit de la taille d'un atome entre deux positions initiales pour que les mouvements soient au bout d'un certain temps complètement différents.

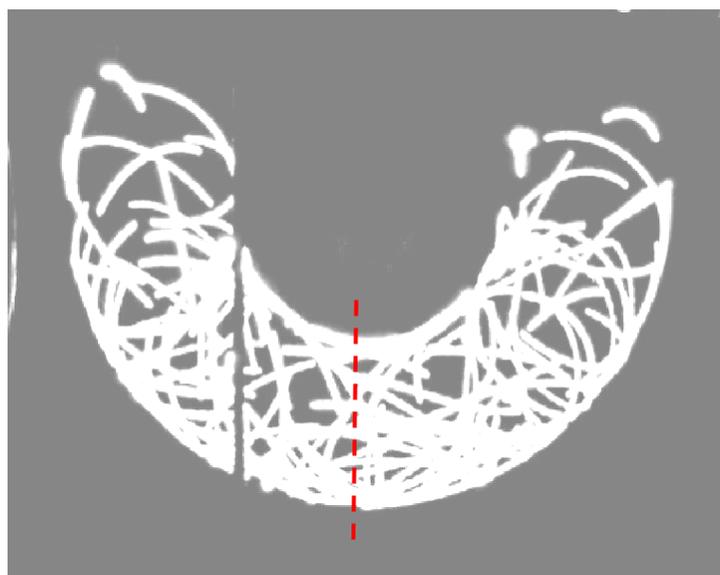
Dans un système chaotique, on définit un **temps caractéristique T** au bout duquel le système voit son écart initial multiplié par 10.

### **b. La non périodicité d'un mouvement chaotique**

Supposons que les conditions initiales soient strictement identiques. Ce qui n'est pas réalisable pour un système réel mais qui est possible pour une simulation. Les trajectoires de deux pendules seront alors parfaitement superposées.

Le chaos intervient alors dans la non périodicité du mouvement.

La figure ci dessous représente la trajectoire de l'extrémité de notre système chaotique. Si l'on coupe cette trajectoire suivant un plan (dit « plan de Poincaré », voir en rouge sur le dessin), les points d'intersection entre la trajectoire et ce plan ne représentent aucune figure périodique ou statistique.



Le comportement du système semble erratique : il ne se répète jamais (voir la définition d'attracteur étrange).

Cependant il n'en est pas moins ordonné. Bien qu'un système soit déterministe il n'en est pas pour autant prévisible : on parle de déterminisme imprévisible. Les résultats d'une prédiction d'un processus non-linéaire seront donc erronés mais néanmoins explicables après que l'évènement se soit produit (« expliquer n'est pas prédire »)

Il est important de préciser qu'il n'est pas question de supprimer le déterminisme de la nature (on parle même de chaos déterministe), la théorie du chaos ne cherche en aucun cas à renier la science et son efficacité mais en revanche elle désire montrer ses limites.

# Un système chaotique : Le double pendule

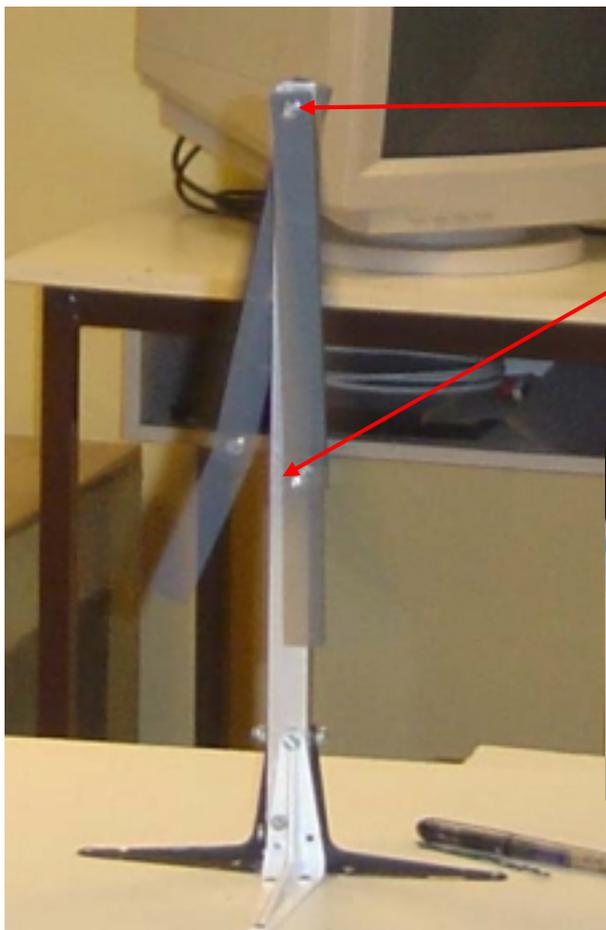
## I. Système choisi

### a. Choix du système

Nous avons découvert notre système grâce à notre professeur d'Olympiades (M. Jeanjacquot) qui avait filmé des expériences scientifiques lors d'une visite de l'EPFL. Nous avons été fasciné par les mouvements (apparemment) complètement aléatoires d'un système appelé double pendule. Désirant comprendre les causes de ce phénomène nous avons décidé de réaliser l'expérience. Nous voulions ainsi vérifier son comportement par nous même et analyser les mouvements.

Le système est donc composé de deux pendules fixés sur un même axe. Chaque pendule est décomposé en deux barres liées par une liaison pivot. Le fait de disposer de deux couples de barres permet de comparer leur mouvement au cours du temps lorsqu'elles sont lancées avec les mêmes conditions initiales.

Cette expérience est assez simple et permet de montrer tous les comportements d'un système dynamique décrits dans l'exposé.

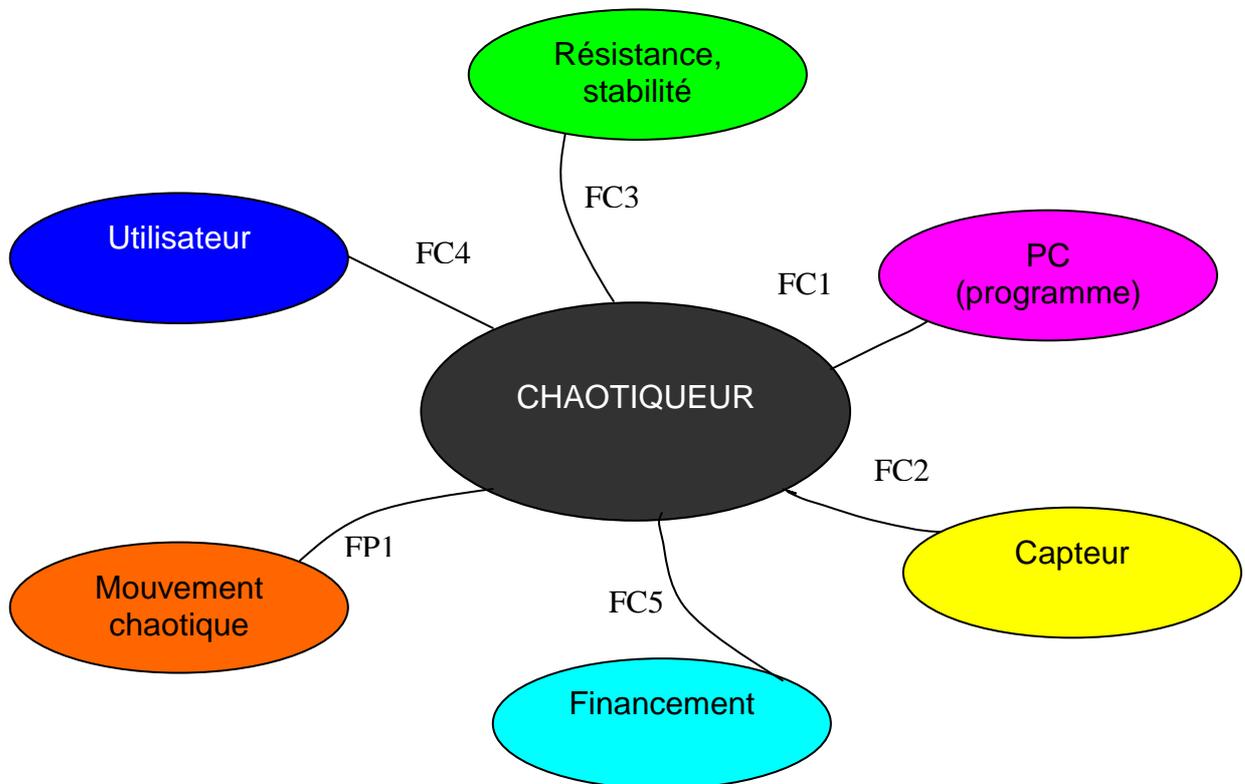


Nous avons utilisé des roulements à billes pour minimiser les frottements. Ils sont placés à l'intérieur des deux principales barres mobiles. Pour éviter une éventuelle perte du maintien des barres nous avons placé à chaque extrémité de vis des écrous indéserrables.



## b. Analyse fonctionnelle

- Recherche des fonctions de service : diagramme des interacteurs.



FP1 : obtenir un mouvement chaotique.

FC1 : relier les capteurs à une unité de traitement (= ordinateur). Ou traiter les données envoyées par les capteurs.

*Justification* : pouvoir exploiter les résultats envoyés par les capteurs grâce à un programme.

FC2 : récolter, mesurer les données à traiter.

*Justification* : données nécessaire à l'élaboration d'un attracteur étrange.

FC3 : résister aux efforts exercés par les barres mobiles.

*Justification* : les moindres vibrations destabilisent l'expérience en la stoppant prématurément.

FC4 : être réglable par l'utilisateur ( au niveau des barres mobiles).

*Justification* : on doit pouvoir faire l'expérience avec différents paramètres dont la longueur des deuxièmes barres mobiles ainsi que le poids

FC5 : être le moins cher possible afin de pouvoir être accessible à tous.

- Recherche de solutions techniques.

Solutions techniques retenues :

#### FC1 : Capteurs

Pour capter les données de notre expérience, nous avons réfléchi à différents types de capteurs (visuel, magnétique, mécanique et photoélectrique) qui comportent tous des avantages et des défauts. Nous essayerons donc de tous les tester afin de voir lequel correspondra le mieux à notre besoin.

- Utiliser une caméra que l'on compilerait avec un programme qui passerait automatiquement de la vidéo à un graphique. Mais faute de temps et de connaissance en programmation nous nous contenterons d'un logiciel déjà existant du Lycée.

Avantage : simplicité du système

Inconvénients :

- l'étude serait trop laborieuse si l'on utilisait le logiciel Synchronie car avec ce dernier nous devrions pointer manuellement 25 images par seconde sur plusieurs minutes
- la caméra ne prend peut être pas assez d'images à la seconde (car on ne sait pas à quelle échelle intervient le chaos : il serait en effet difficile d'observer le chaos avec une caméra qui prendrait 25 images par seconde alors que la chaos interviendrait sur quelques millisecondes !)

- Utiliser directement une webcam avec laquelle l'ordinateur analyserait automatiquement image par image la vidéo. Pour ce faire nous avons mis des points de couleurs aux extrémités des barres pour que le logiciel (cinéris) puisse reconnaître les points à étudier.

Avantages :

- On peut régler le temps d'obturation de sorte que lorsque l'on décompose la vidéo image par image de sorte que celles-ci soient nettes.
- Installation simple

Inconvénients :

- la vidéo obtenue est en MPEG alors que cinéris ne lit que les formats AVI. Ainsi il nous faut convertir les vidéos.
- coût élevé (webcam + logiciels)

- Nous avons ensuite pensé à un capteur photoélectrique. La photodiode (récepteur) éclairé par un laser (émetteur) captera une intensité lumineuse proportionnelle au dégradé de couleur du disque qui sera analysé par le PC. Ensuite ce dernier transformera la tension obtenue en degrés afin d'obtenir des graphiques compréhensibles.

Avantage :

- vitesse de capture importante (beaucoup de données par secondes donc plus de précision dans les graphiques obtenues)

- travail de traitement des données recueillies facile et rapide

Inconvénients :

- quand la barre mobile passera devant la photodiode, la lumière ne passera plus et nous aurons donc une zone de vide dans le graphique.
- il faut déterminer par une calibration la relation entre l'angle du pendule et la tension issue du capteur. La calibration est très sensible aux vibrations et aux imperfections de l'impression.

- Nous avons imaginé un capteur magnétique qui serait composé d'un aimant et d'une bobine. L'aimant est fixé sur l'axe (la vis) assurant la liaison pivot c'est-à-dire sur la partie mobile. Lorsque l'aimant tourne il apparaît une force électromotrice induite aux bornes de la bobine. Elle serait alors mesurée à l'aide d'un voltmètre (ou d'un système d'acquisition). Cette tension dépendrait de la vitesse et du sens de rotation.

Avantage :

- vitesse de capture très importante
- travail de traitement des données non laborieux

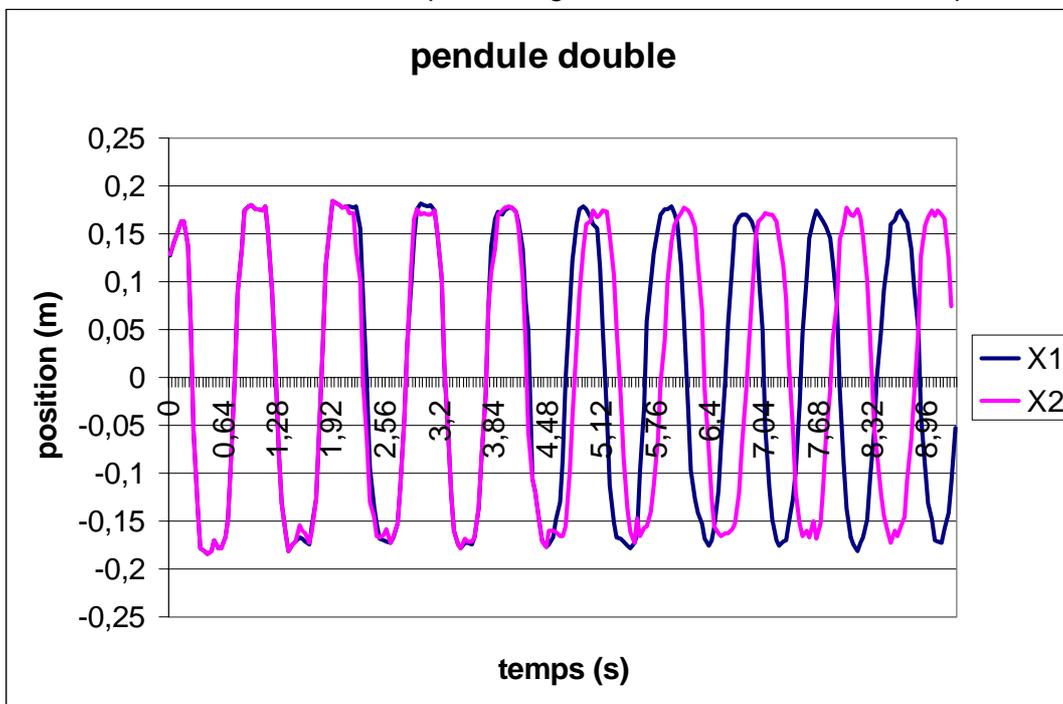
Inconvénients :

- force magnétique appelée frein de Foucauld qui risquerait de ralentir le système.

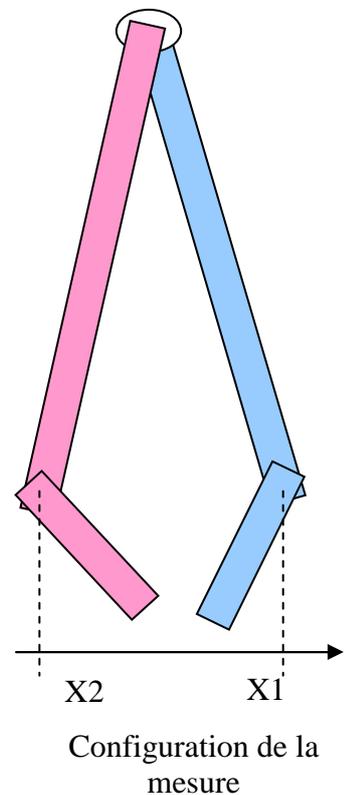
## II. Analyse des mouvements du système, acquisition vidéo

### a. Récoltes

Les données récupérées grâce à la caméra nous ont permis d'obtenir ce graphique :



*Positions de la liaison entre les deux barres mobiles au cours du temps.*



## b. Interprétations

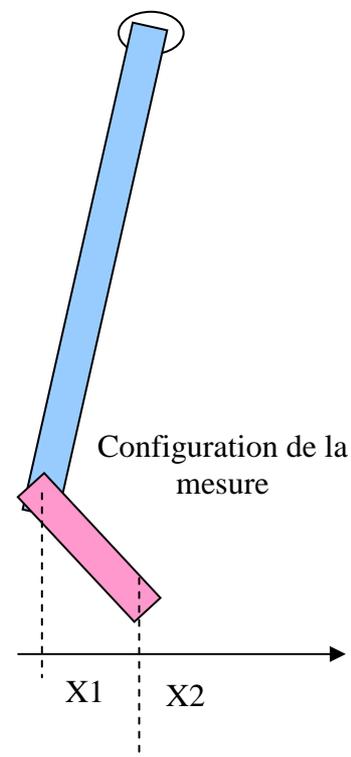
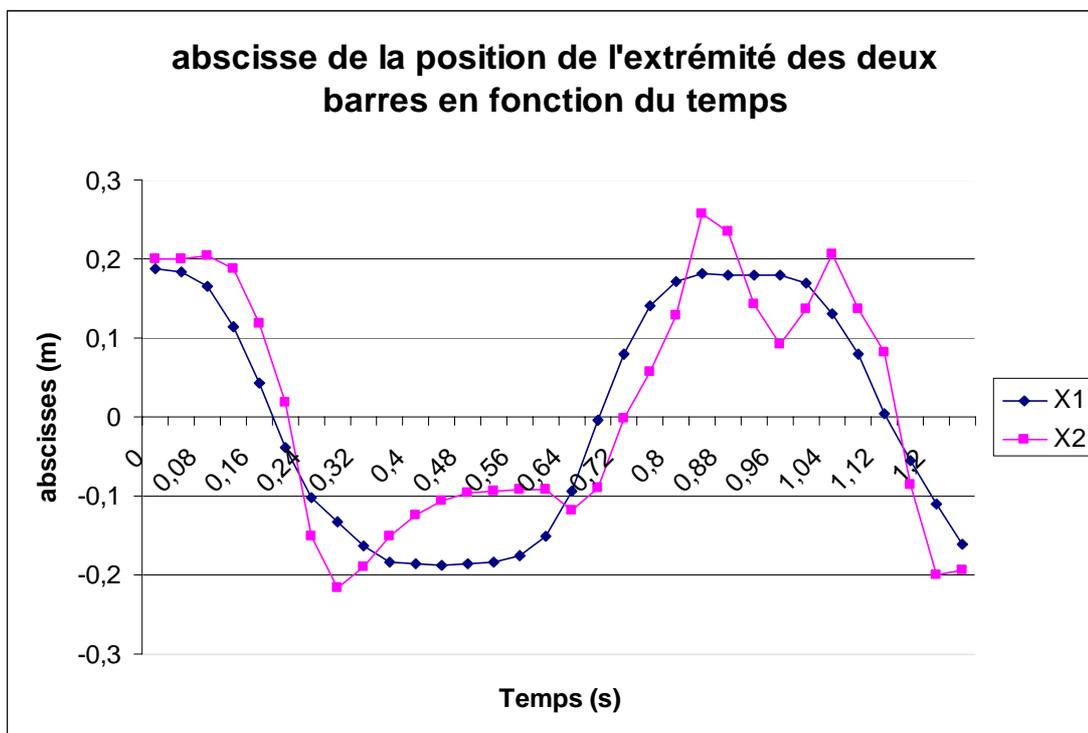
Si le système était linéaire, les deux barres devraient décrire le même mouvement. Mais si les mouvements diffèrent au bout d'un certain temps alors ceci indiquerait que le système est non-linéaire.

Or c'est ce que nous pouvons observer : ce graphique illustre donc la dépendance aux conditions initiales.

## c. Conclusion

Nous avons obtenu une preuve que le système est très sensible aux conditions initiales. Plus tard dans l'année, nous pourrions établir un attracteur étrange et nous étudierions le chaos dans le système afin de définir taux de désordre, le temps caractéristique du système.

## d. Problèmes d'incertitudes et de difficultés d'exploitation des mesures



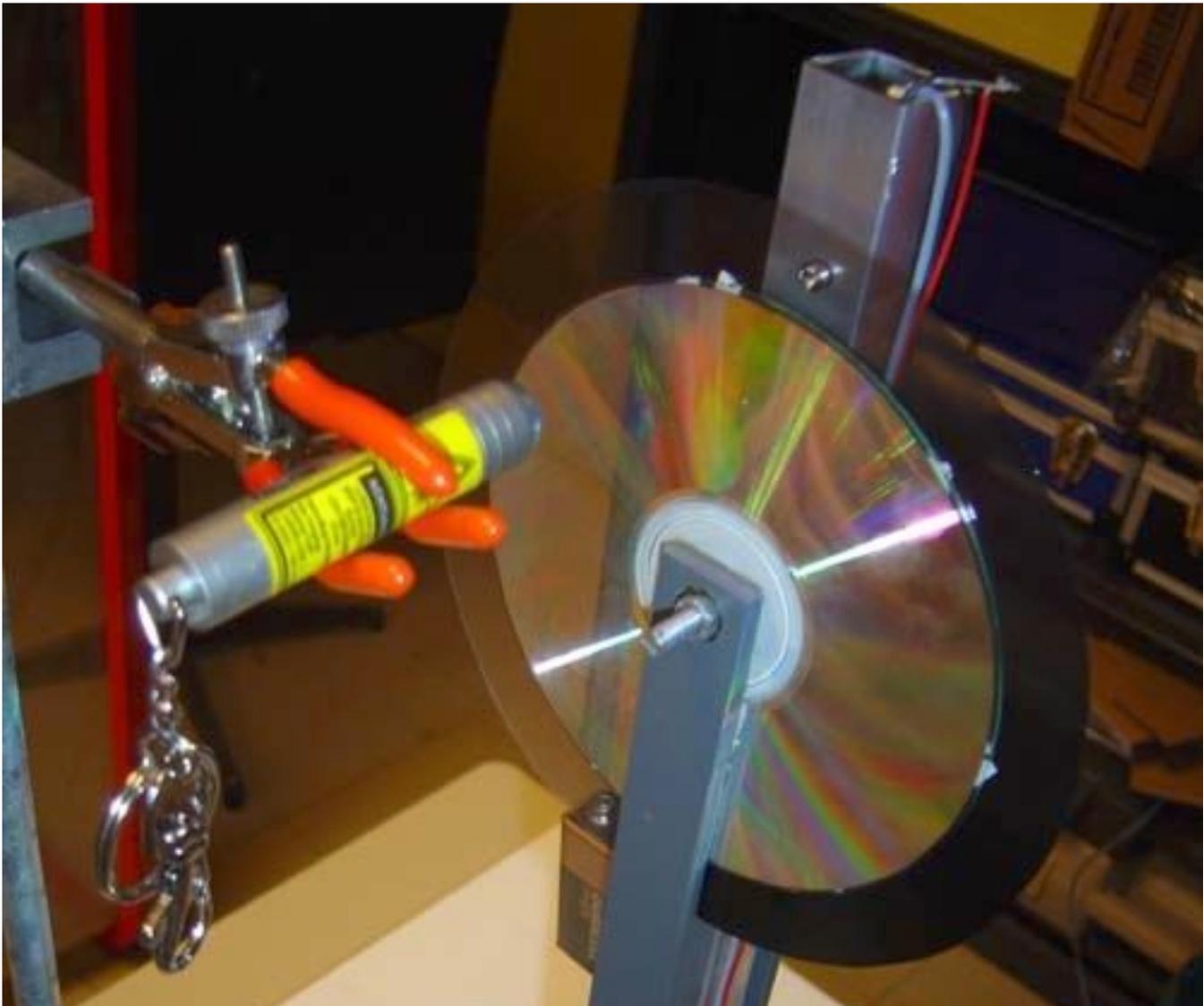
Dans ce cas de figure, on constate que la mesure de la position X2 de la deuxième branche du pendule est très incertaine. La mesure est toujours réalisée grâce à la caméra. La fréquence de l'acquisition est trop faible par rapport à celle de rotation du deuxième pendule.

De plus, L'acquisition est longue car il faut pointer la position sur chacune des images. Il faut donc trouver un moyen d'enregistrer de manière plus précise et plus rapide la position des pendules.

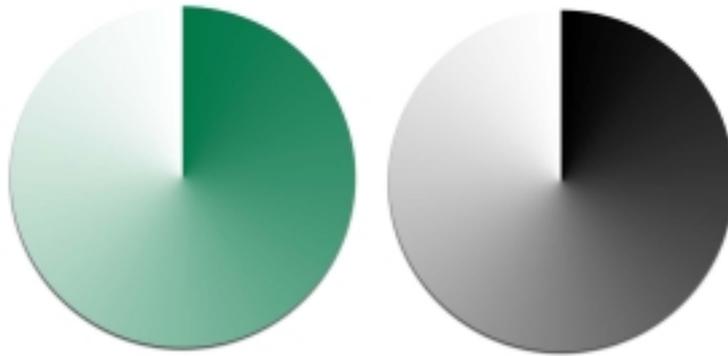
### III. Acquisitions avec une photodiode

Grâce au capteur avec la photodiode que nous venons de finir nous espérons avoir de meilleurs résultats qu'avec la caméra (le prototype nous a posé beaucoup de problèmes techniques lors de sa réalisation). Mais pour cela, il faut d'abord parfaitement savoir comment il fonctionne.

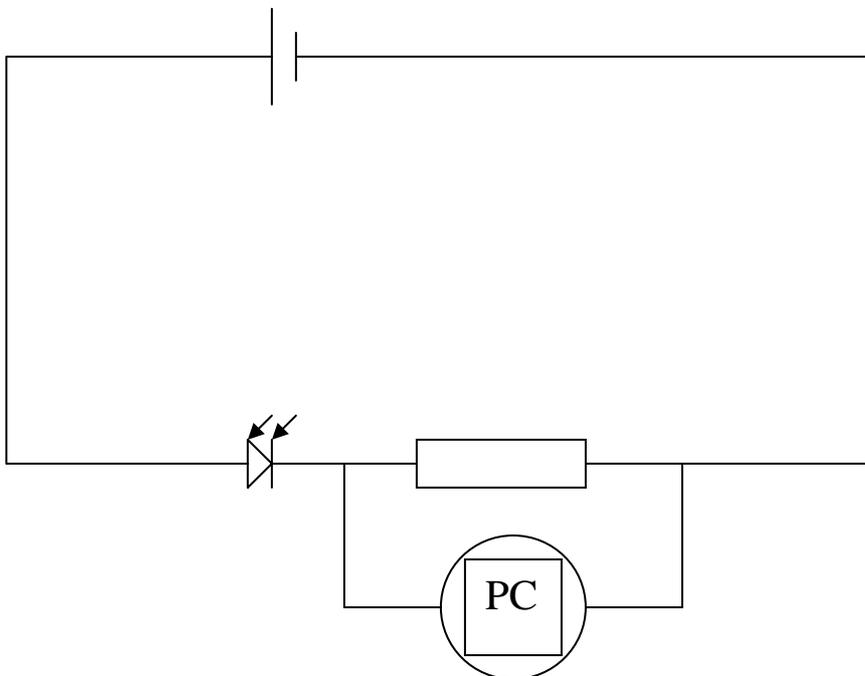
#### a. La photodiode



Comme vu ci-dessus, notre capteur est composé d'un laser qui éclaire une photodiode à travers un disque de plastique dégradé. Lorsque le disque tourne, la tension aux bornes de photodiode varie (voir schéma électrique).



*Modèles de disques dégradés transparents en vert (couleur complémentaire de celle émise par le laser) et en gris*



*Schéma électrique su système d'acquisition.*

Cette tension est ensuite convertie en angle grâce à une courbe obtenue en mesurant à plusieurs endroits la tension en fonction de l'angle. Puis on obtient la vitesse angulaire en faisant la dérivée de l'angle.

On peut alors commencer à interpréter les différents résultats.

Le montage pose quelques problèmes matériels liés à la fixation du laser.

## b. Protocole d'expérimentation

Pour utiliser notre expérience, nous procédons en trois étapes :

- il faut d'abord préparer le système c'est à dire faire en sorte que les deux barres soient lancées au même moment et le plus proche possible à moins de vouloir créer exprès un écart et de voir quand celui-ci aura été multiplié par 10 ( temps caractéristique ). Pour cela, nous avons utilisé des électroaimants (voir ci-dessous).

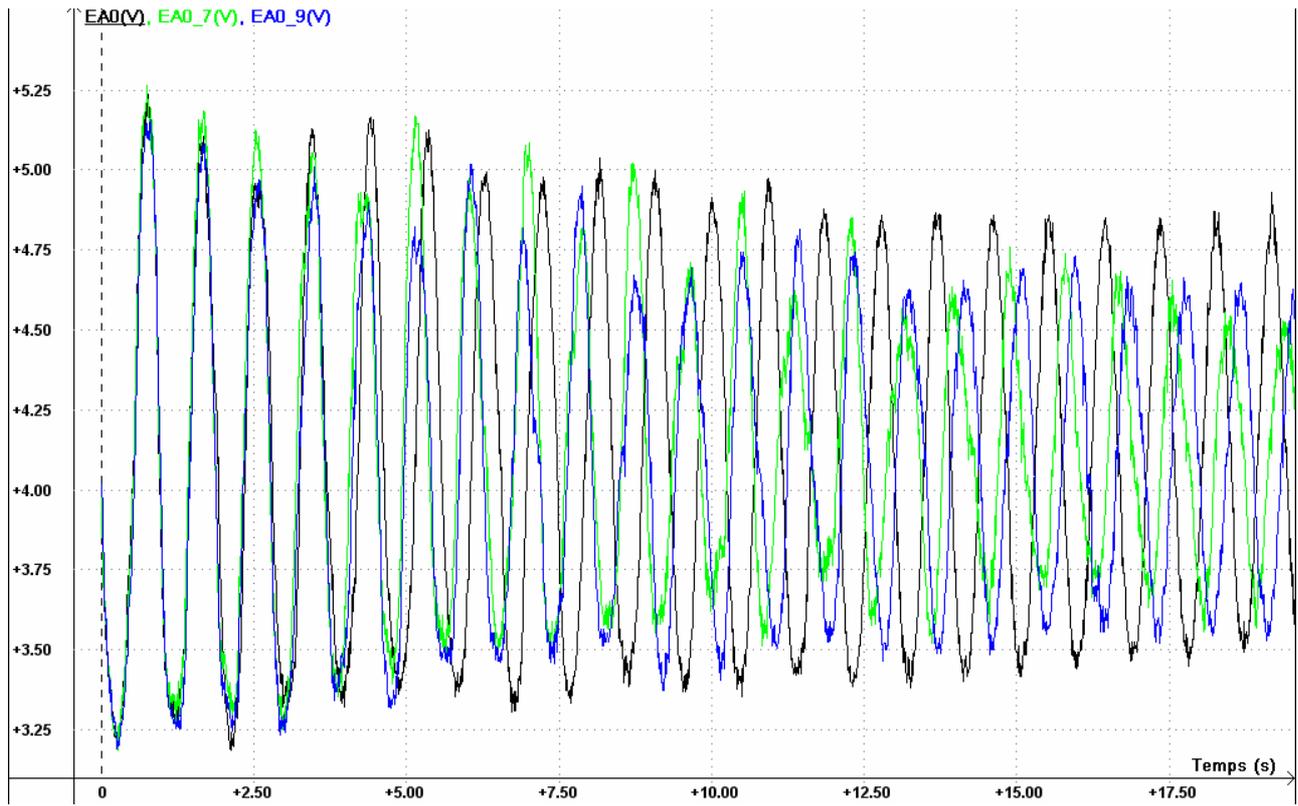


- Puis nous lançons les barres qui ont au début un mouvement quasiment identique mais qui diffère au bout de quelques secondes.
- Pendant ce temps, l'acquisition se fait automatiquement sur l'ordinateur grâce au logiciel synchronie.

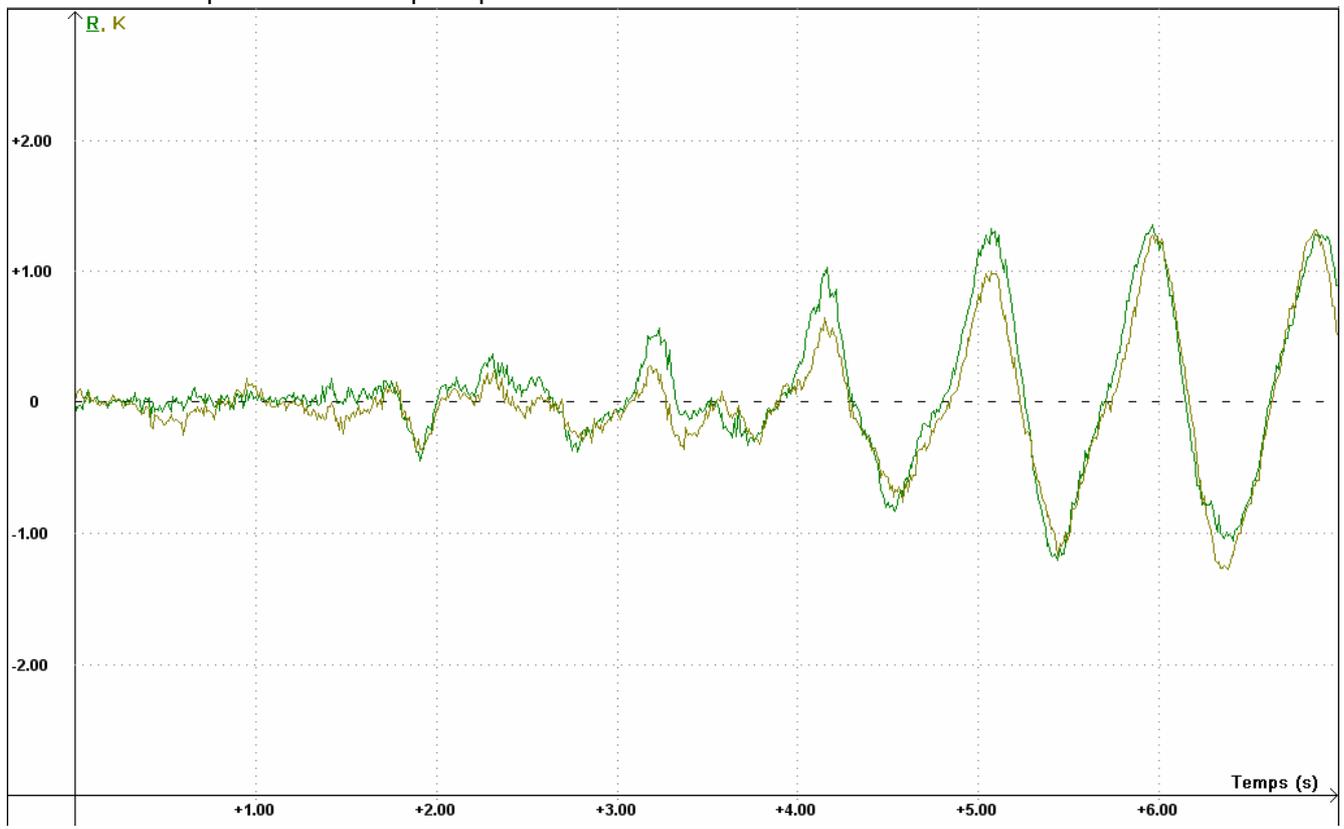


*L'acquisition sous synchronie.*

### c. Les mesures



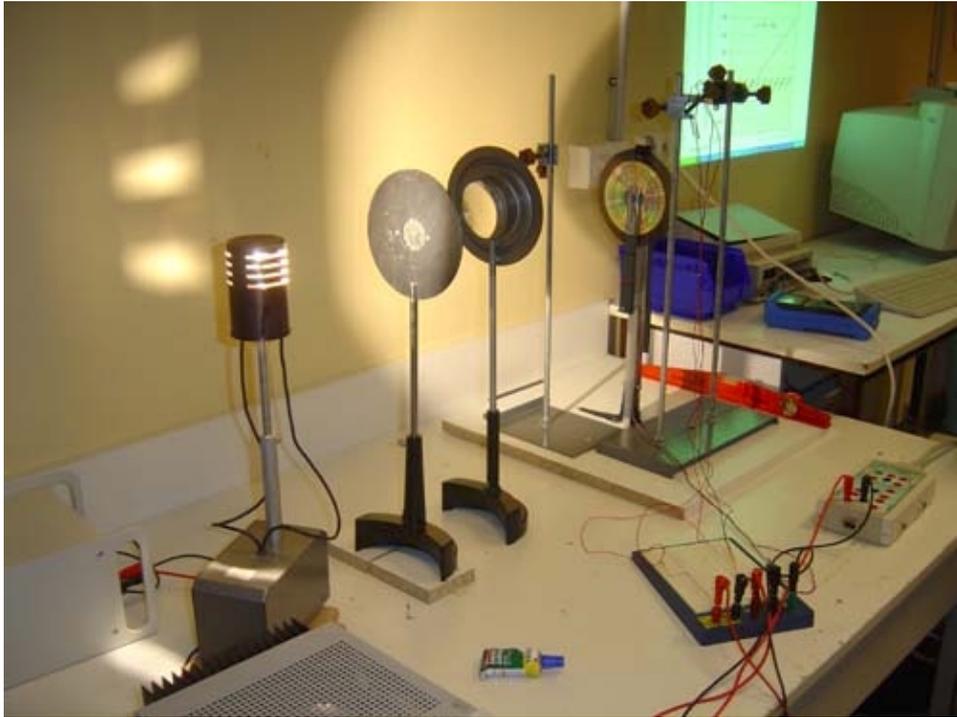
Cette série de courbes représente 6 mesures successives (tension) avec les mêmes conditions initiales expérimentales ; on remarque qu'au bout de 3 périodes les mesures se dissocient. Le comportement du pendule n'est plus prévisible.



Cette deuxième courbe montre l'écart de tension entre la première acquisition et les 5 autres. On remarque également un bruit important dû aux vibrations du laser.

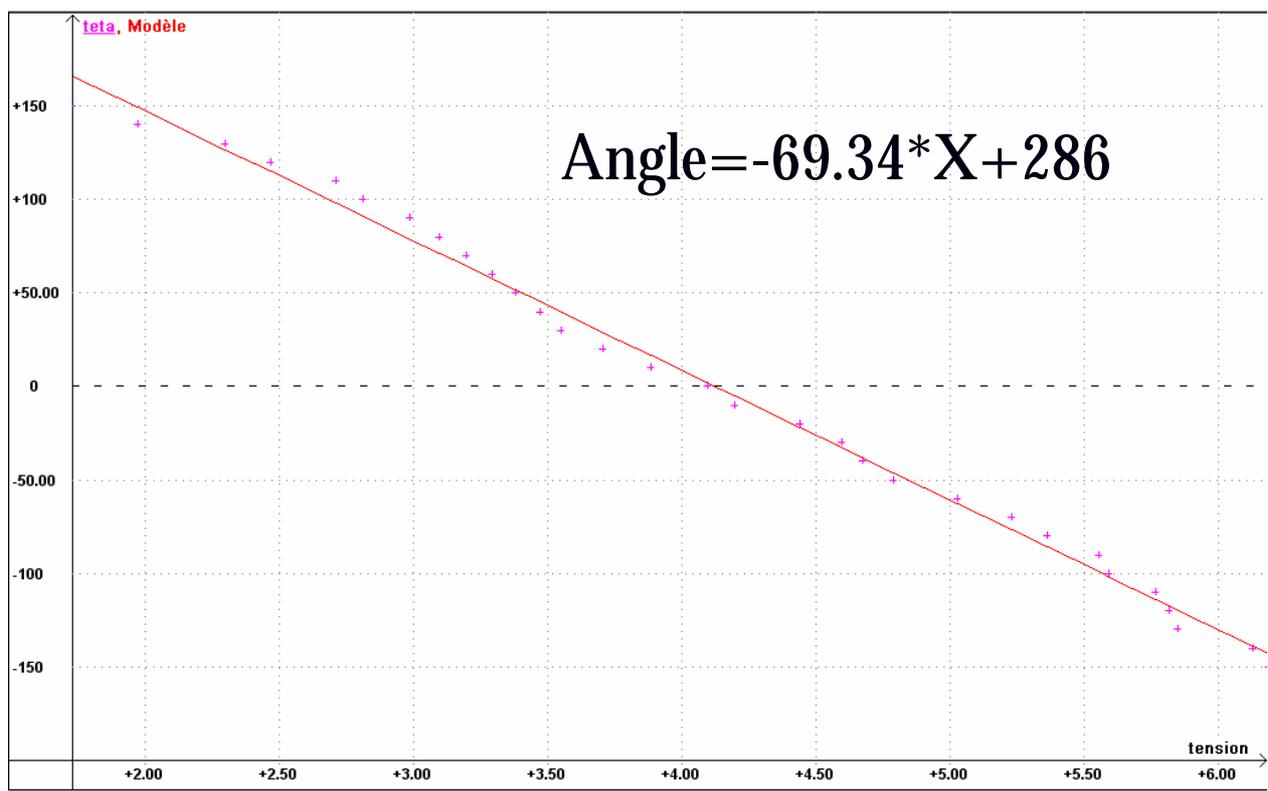
#### d. Modification du montage

Pour avoir moins de bruit dans les mesures nous avons remplacé le laser par un système optique plus stable. Le montage a été photographié ci-dessous.

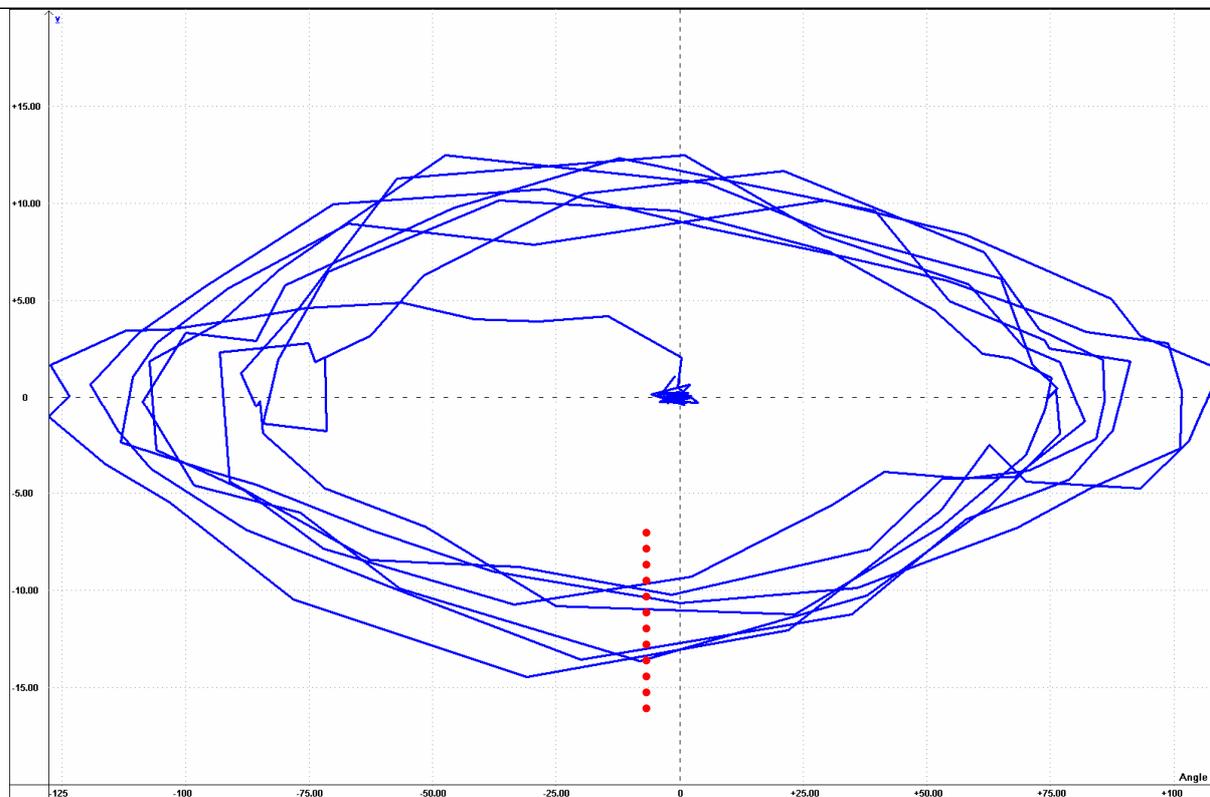
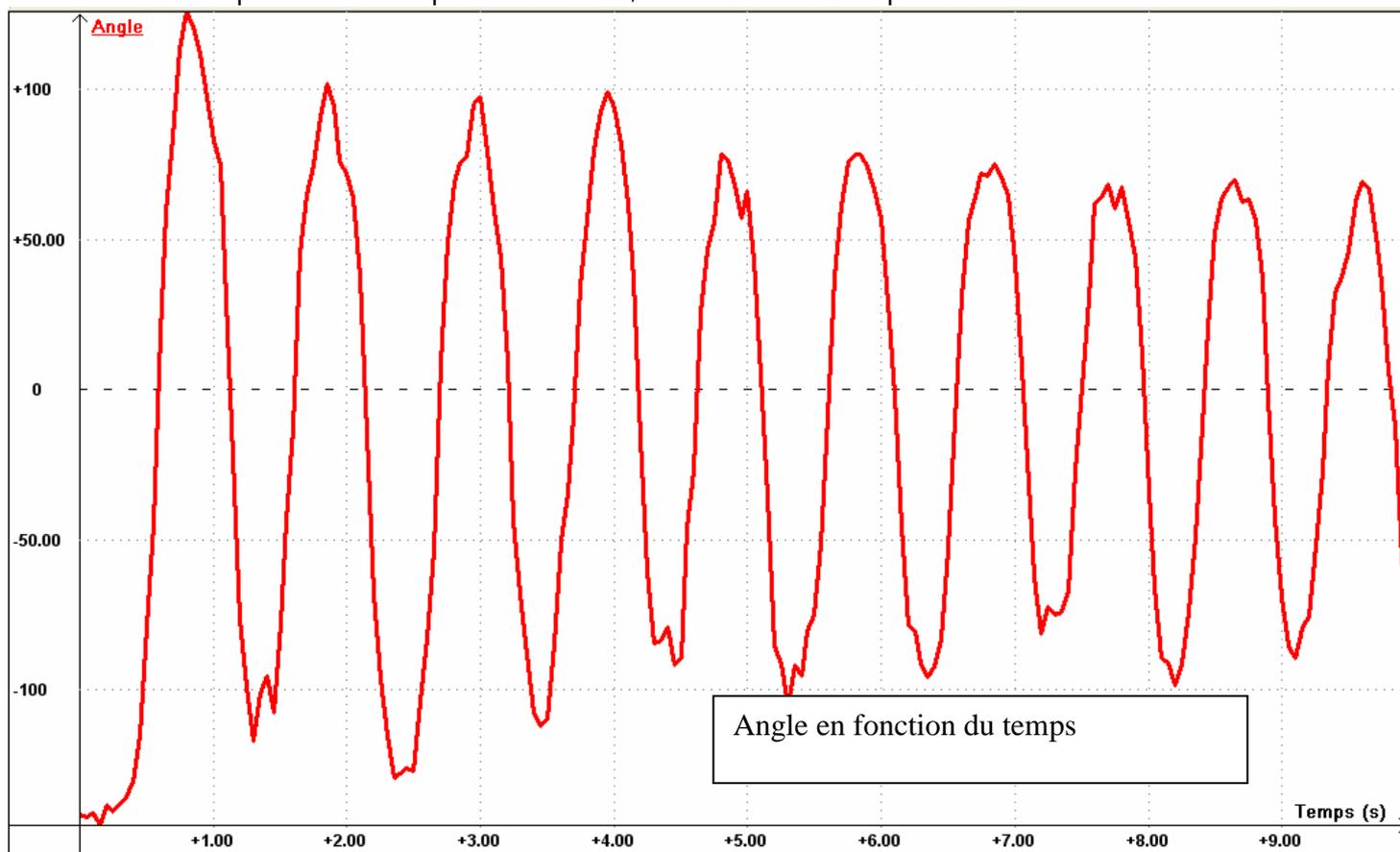


#### e. La calibration et les mesures associées

Les mesures nous ont alors permis de calibrer correctement l'angle d'inclinaison du premier pendule en fonction de la tension mesurée par le système d'acquisition. Nous avons alors modélisé et choisi la fonction la plus simple représentative de notre courbe de calibration.



Nous avons pu alors réaliser des mesures et les convertir en angle. On se rend compte dans ce cas que l'oscillation du pendule n'est pas périodique. Cependant, la courbe ressemble a une sinusoïde, mais la période n'est pas constante, elle varie chaotiquement entre deux extrema.



Plan des phases : vitesse angulaire en fonction de l'angle. *Ne pas prendre en compte le point situé au centre du diagramme qui correspond au pendule au repos avant le mouvement.* La coupe de cet espace par une section de Poincaré permet de constater la nature chaotique du mouvement

## CONCLUSION

Finalement, la théorie du chaos comporte deux aspects qui sont la dépendance aux conditions initiales et le déterminisme imprévisible

L'expérience peut être réalisée à un coût très faible en lycée (30 Euros).

Les difficultés ont été de comprendre, de définir clairement et simplement le chaos, de trouver des outils adéquats pour l'étudier.

Le système d'acquisition a été très long à mettre correctement au point, il a fallu trouver un système fiable, qui permet de faire beaucoup de mesures et qui ne génère pas de frottement. Le système ne fonctionne correctement que depuis le début du mois de novembre 2006. Cependant quelques points sont à revoir. Nous cherchons toujours d'autres solutions : webcam.

Il reste à faire d'autres séries de mesures, par exemple réaliser des acquisitions en changeant la taille des barres pour voir leurs influences sur le système. On pourrait aussi essayer d'entretenir le mouvement pour faire un attracteur étrange.

Nous envisageons de faire également une simulation pour montrer l'influence des paramètres initiaux (celle ci est longue et en cours de réalisation)

Nous terminons notre compte rendu par un lien historique :

Le problème des trois corps imaginé par Poincaré dit qu'il est impossible de prévoir avec exactitude les mouvements de trois corps ou plus par exemple les planètes du système solaire ou même le double pendule.

En effet notre système est composé de trois corps : la Terre avec la gravitation, la première barre et la deuxième barre. La Terre influe sur les deux barres une à une et celles-ci s'influencent mutuellement dans un cercle sans fin.

# GLOSSAIRE

**Espace des phases** : C'est un espace abstrait permettant de disposer sur un repère autant de paramètres (ou dimensions) nécessaires pour caractériser l'état d'un système. On représente et caractérise ainsi en un point l'état du système à un instant donné. A mesure que le système évolue, le point va décrire une courbe dans l'espace des phases.

**Le plan de Poincaré** : Le mathématicien imagina de couper les courbes de l'espace des phases avec un plan vertical. Les points d'intersection de la trajectoire avec le plan tracent alors des dessins permettant de discerner les différents comportements du système (il permet par exemple de compter le nombre de courbes, de voir leur agencement, leurs relations ...) et de montrer si le système est chaotique ou non (si le dessin obtenu n'est pas régulier)).

**Attracteur étrange** : C'est le nom donné au dessin obtenu avec le plan de Poincaré. Edward Lorenz, météorologue du MIT en étudiant les mouvements de convection d'air chaud et froid dans les couches de l'atmosphère et établissant un attracteur étrange à partir de ce phénomène, montra que le point représentant le système ne répétait jamais son mouvement. En fait ces attracteurs sont des fractales car si l'on zoome indéfiniment sur une courbe du dessin du plan on retrouvera toujours le même dessin (par exemple si l'on zoome sur une courbe on verra qu'elle est en fait composée de plusieurs courbes et en zoomant encore plus on retrouvera les mêmes composante de la courbes).

Le point représentant l'état du système est attiré vers une courbe limite, près de laquelle il repasse régulièrement. Les mathématiciens appellent ces courbes des « attracteurs étranges ».

# SOURCES

Livres :

- La théorie du chaos de James Gleick
- Le chaos et l'Harmonie de Trinh Xuan Thuan (lu que partiellement)
- Le CHAOS d'Ivar Ekeland

Collaboration :

Monsieur Mizony (directeur de l'IREM de Lyon). Il vient régulièrement nous aider.

Revue scientifique :

Le chaos : dossier de *Pour la science*.

Sites Internet :

- <http://fr.wikipedia.org/>
- <http://www.edelo.net/chaos/sommaire.htm> ce site est en fait une fiche de lecture très complète du livre de James Gleick.

-

Remerciements :



rhône-Alpes



**RANCHET**  
enseignement

Merci à : - M. MI ZONI , directeur de l'I REM de Lyon.  
- M.JEANJACQUOT , qui nous a encadré pendant notre projet