

ANNEXES



Fonction pour générer des ondes gravitationnelles (détail des calculs)

Le document indique que le signal GW peut être calculé ainsi $h(t) = A(t) \cos \varphi(t)$

avec $A(t) = \frac{4\mathcal{M}^{5/3}\pi^{2/3}F(t)^{2/3}}{D}$ et $\varphi(t) = \varphi_0 - 2\left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}} - \frac{t}{5\mathcal{M}}\right)^{5/8}$

où \mathcal{M} est la *chirp mass* : $\mathcal{M} = \mu^{3/5}M^{2/5}$

avec la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ et la masse totale $M = m_1 + m_2$

Ces relations permettent de déterminer la vibration de l'espace-temps par $h(t)$.

$$\varphi(t) = \varphi_0 - 2\left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}} - \frac{t}{5\mathcal{M}}\right)^{5/8} = \varphi_0 - 2\left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}}\left(1 - \frac{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}t}{5\mathcal{M}}\right)\right)^{5/8}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - 2\left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}}\right)^{5/8}\left(1 - \frac{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}t}{5\mathcal{M}}\right)^{5/8}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - 2\left(\frac{1}{2^5(\pi\mathcal{M}F_0)^{5/3}}\right)\left(1 - \frac{256\mathcal{M}^{5/3}(\pi F_0)^{8/3}t}{5}\right)^{5/8} = \varphi_0 - \left(\frac{2^4\pi F_0}{2^8\mathcal{M}^{5/3}(\pi F_0)^{8/3}}\right)\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \left(\frac{2^4\pi F_0}{5}\right)\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8} = \varphi_0 - (10,05 F_0 t_c)\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8} \quad \text{avec} \quad t_c = \frac{5}{256(\pi F_0)^{8/3}\mathcal{M}^{5/3}} = \frac{9,23 \cdot 10^{-4}}{F_0^{8/3}\mathcal{M}^{5/3}}$$

t_c se nomme le temps de coalescence.

On prendra $\varphi_0 = 0$ d'où $\cos \varphi(t) = \cos\left(-\left(10,05 F_0 t_c\right)\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8}\right) = \cos\left(\left(10,05 F_0 t_c\right)\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8}\right)$

L'évolution de la fréquence est donnée par : $F(t) = \frac{(\mathcal{M}F_0^9)^{1/8}}{\left[(\mathcal{M}F_0)^{1/3} - \frac{256F_0^3\mathcal{M}^2\pi^{8/3}t}{5}\right]^{3/8}}$

Ou encore $F(t) = \frac{(\mathcal{M}F_0^9)^{1/8}}{\left[(\mathcal{M}F_0)^{1/3}\left(1 - \frac{256F_0^{(3-1/3)}\mathcal{M}^{(2-1/3)}\pi^{8/3}t}{5}\right)\right]^{3/8}} = \frac{(\mathcal{M}F_0^9)^{1/8}}{(\mathcal{M}F_0)^{1/8}\left(1 - \frac{256F_0^{(3-1/3)}\mathcal{M}^{(2-1/3)}\pi^{8/3}t}{5}\right)^{3/8}}$

$F(t) = \frac{F_0}{\left(1 - \frac{256F_0^{8/3}\mathcal{M}^{5/3}\pi^{8/3}t}{5}\right)^{3/8}}$ soit plus simplement : $F(t) = \frac{F_0}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{3/8}}$

Cas où les deux objets fusionnant ayant la même masse m (détail des calculs)

$$M = m_1 + m_2 = 2m, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{(M/2)^2}{M} = \frac{M}{4} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5} = (M/4)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M^{5/5}}{4^{3/5}} = \frac{M}{4^{3/5}}$$

$$\text{Dans ce cas, } t_c = \frac{5}{256(\pi F_0)^{8/3} \left(\frac{M}{4^{3/5}}\right)^{5/3}} = \frac{5 \times 4}{256(\pi F_0)^{8/3} M^{5/3}} = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{F_0^{8/3} M^{5/3}}$$

$$A(t) = \frac{4\mathcal{M}^{5/3} \pi^{2/3}}{D} F(t)^{2/3} = \frac{4\pi^{2/3}}{D} \cdot \frac{5}{256 t_c (\pi F_0)^{8/3}} \left(\frac{F_0}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{3/8}} \right)^{2/3} = \frac{20}{256 \pi^2 F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}}$$

Il est indiqué que les grandeurs sont données en unités géométrisées :

$$1M_\odot = G M_\odot / c^3 = 4,93 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad \text{et} \quad 1\text{Mpc} = 3,086 \cdot 10^{16} \cdot 10^6 / c = 1,03 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

$$A(t) = \frac{20}{256 \pi^2 F_0^2 t_c D \times 1,03 \cdot 10^{14}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \quad (\text{avec } D \text{ en Mpc})$$

$$\text{D'où } h(t) = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \cos \left((10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8} \right)$$

Relation entre masse totale du système et temps de coalescence :

$$t_c = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{F_0^{8/3} M^{5/3}} \Rightarrow M^{5/3} = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{t_c F_0^{8/3}} \Rightarrow M = \left(\frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{t_c F_0^{8/3}} \right)^{3/5} = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{t_c^{3/5} F_0^{8/5}}$$

Ondes gravitationnelles détectées par LIGO/Virgo

GW150914		
14 septembre 2015	Coalescence de deux trous noirs. $1,3 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 29 + 36 \rightarrow 62 (+ 3).	
GW151226		
26 décembre 2015	Coalescence de deux trous noirs. $1,4 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 14,2 + 7,5 \rightarrow 20,8 (+ 1).	
GW170608		
8 juin 2017	Coalescence de deux trous noirs. $0,7$ à $1,5 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 12 + 7 \rightarrow 18 (+ 1).	
GW170814		
14 août 2017	Coalescence de deux trous noirs. $1,8 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 25 + 31 \rightarrow 53 (+ 3).	
GW170817		
17 août 2017	Coalescence de deux étoiles à neutrons. $1,3 \times 10^8$ al ; bilan (M_{\odot}) : 1,2 + 1,5 \rightarrow 2,7 (+ 0,025).	

On a repéré la fréquence 64 Hz pour l'évaluation des temps de coalescence t_c .

Programme python permettant de déterminer l'influence des miroirs de recyclage

```
# Affichage de l'état d'interférence pour x compris entre 0 et 2 lambda

from cmath import *
from pylab import *
a,b,c,d=0.085,0.085,0.085,0.085
v=340 # 340 m/s
F0=40000 # 40 kHz
l=v/F0 # lambda
K1=0.8 # coefficient reflexion sur miroir
K2=0.6 # coefficient reflexion sur emetteur recepueur
numeros=[]

for n in range(1,10):
    plage_deplacement=[]
    plage_intensite=[]

    for i in range(0,200):
        x=i*l/100 # déplacement du miroir pour x de 0 à 2lambda
        zE=1 # zE=1 émission de sin(2piF0t + 0)
        zR=0 # zR=0 pas d'émission initiale
        zRS=0
        zES=0
        phase1=2*pi/l*(a+2*(b+x)+d) # retard1 sur trajet a b b d + x + x
        phase2=2*pi/l*(a+2*c+d)
        phase3=2*pi/l*(d+2*b+d+2*x)
        phase4=2*pi/l*(d+2*c+d)
        phase5=2*pi/l*(a+2*b+a+2*x)
        phase6=2*pi/l*(a+2*c+a)
        phase7=2*pi/l*(d+2*b+a+2*x)
        phase8=2*pi/l*(d+2*c+a)

        for m in range(0,n):
            z1=(zE*exp(complex(0,-phase1)))/4 # z1=zE/4 avec un retard de phase1
            z2=(zE*exp(complex(0,-phase2)))/4
            z3=(zR*exp(complex(0,-phase3)))/4
            z4=(zR*exp(complex(0,-phase4)))/4
            z5=(zE*exp(complex(0,-phase5)))/4
            z6=(zE*exp(complex(0,-phase6)))/4
            z7=(zR*exp(complex(0,-phase7)))/4
            z8=(zR*exp(complex(0,-phase8)))/4

            zR=K1*(z1+z2+z3*K2+z4*K2) # somme des 4 ondes reçues en R
            zE=K1*(z5+z6+z7*K2+z8*K2) # somme des 4 ondes reçues en E
            zRS=zRS+zR # somme de toutes les ondes reçues en R issues
des réflexions sur les miroirs de recyclage
```

```

        zES=zES+zE          # somme de toutes les ondes reçues en E issues
des réflexions sur les miroirs de recyclage
        y=abs(zRS)          # module
        plage_deplacement.append(x)
        plage_intensite.append(y)
        numeros.append([plage_deplacement,plage_intensite])

for i in numeros:
    plot(i[0],i[1])
show()

```

Programme python permettant de modéliser la vibration détectée

```

### modélisation de l'onde gravitationnelle

```

```

import os
import csv
from math import *
from pylab import *
f = figure()
ax = f.add_subplot(111)

def lire (nomfichier):#importe un fichier csv sous forme de liste
    liste=[]
    fichier = open(nomfichier,'r')
    csv_reader = csv.reader(fichier, delimiter=';', lineterminator=""'\n"")
    for ligne in fichier:
        liste.append( ligne.replace("""\""", "").replace("""\n""", "").
            replace(",",".").split(";"))
    fichier.close()
    del liste[0]
    return (liste)

def fonction (t,f0,tc,amp,phi):
    U= amp * (1 / (1 - t / tc)**(1 / 4))*cos(phi+10*f0*tc*(1 - t / tc)**(5 / 8))
    return (U)

liste=lire(r"C:\Users\Antoine\Documents\Physique\Ondesgravitationnelles\Scripts\4
0_2_1V_A.csv")#importe le fichier csv désigné sous forme de liste
taille=len(liste)
listex,listey=[],[]
for i in liste:#création listes abscisses (temps) et coordonnées (amplitude)
    listex.append(float(i[0]))
    listey.append(float(i[1]))
plot(listex, listey,linewidth=1,label="Mesures")

precmax=5
f0=40
tc=2
print ("tc=",tc,"s")
print("f0=",f0,"Hz")

```

Détermination du déphasage phi

```
ampini=max(listey)/5
phiperf,phitest,prec=0,0,0
perf=inf
phimax=7

#détermination d'une fourchette qui se resserre autour du phi le plus semblable
aux mesures
while prec<precmax:
    while phitest<phimax:
        delta=0
        for i in range (taille):
            delta+=abs(listey[i]- fonction (listex[i],f0,tc,ampini,phitest))
        if delta<perf:
            perf=delta
            phiperf=phitest
        phitest+=10**-prec
    prec+=1
    phitest=phiperf-6*10**-prec
    phimax=phiperf+6*10**-prec

print("phi=",round(phiperf%(2*pi),precmax),"rad")
```

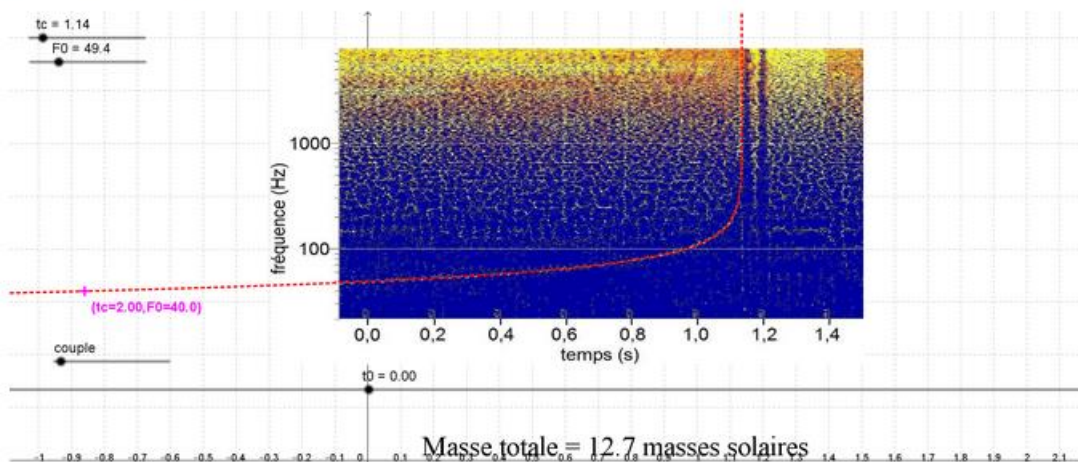
Détermination de l'amplitude

```
ampperf,amptest,prec=0,0,0
perf=inf
ampmax=int(ceil(max(listey))/2)
#détermination d'une fourchette qui se resserre autour de l'amplitude la plus
semblable aux mesures
while prec<precmax:
    while amptest<ampmax:
        delta=0
        for i in range (taille):
            delta+=abs(listey[i]- fonction (listex[i],f0,tc,amptest,phiperf))
        if delta<perf:
            perf=delta
            ampperf=amptest
        amptest+=10**-prec
    prec+=1
    amptest=ampperf-6*10**-prec
    ampmax=ampperf+6*10**-prec

print("amplitude=",round(ampperf,precmax),"V")
#création d'un graphique affichant la modélisation et les mesures
listey=[]
for i in range (taille):
    listey.append(fonction(listex[i],f0,tc,ampperf,phiperf))
plot(listex, listey,"r",linewidth=1.5,label="Modele")
legend()
show()
```


Protocole de construction geogebra pour analyse d'onde gravitationnelle

Advanced Arago

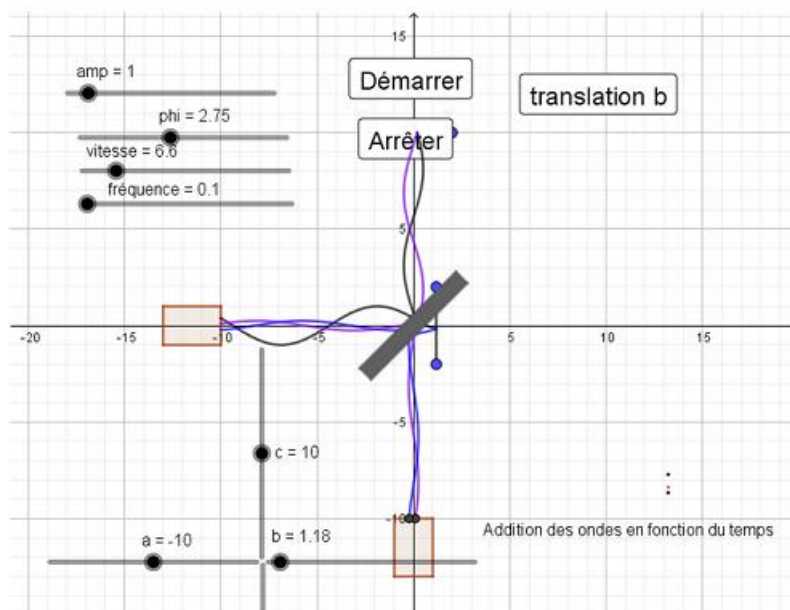


No.	Nom	Description	Valeur	Définition
1	Nombre A		$A = 29.5$	
2	Nombre tc		$tc = 1.14$	
3	Nombre F0		$F0 = 49.4$	
4	Fonction f	$f(x) = A \cdot 1.00 / (1.00 - x / tc)^{(1.00 / 4.00)} \cdot \sin(10.0 F0 tc (1.00 - x / tc)^{(5.00 / 8.00)})$	$f(x) = 29.5 * 1.00 / (1.00 - x / 1.14)^{(1.00 / 4.00)} \sin(10.0 * 49.4 * 1.14 (1.00 - x / 1.14)^{(5.00 / 8.00)})$	$f(x) = A \cdot 1.00 / (1.00 - x / tc)^{(1.00 / 4.00)} \sin(10.0 F0 tc (1.00 - x / tc)^{(5.00 / 8.00)})$
5	Courbe h _t	$Courbe(t, A \cdot 1.00 / (1.00 - t / tc)^{(1.00 / 4.00)} \sin(10.0 F0 tc (1.00 - t / tc)^{(5.00 / 8.00))), t, 0.00, tc)$	$h_t:(t, 29.5 * 1.00 / (1.00 - t / 1.14)^{(1.00 / 4.00)} \sin(10.0 * 49.4 * 1.14 (1.00 - t / 1.14)^{(5.00 / 8.00)))$	$Courbe(t, A \cdot 1.00 / (1.00 - t / tc)^{(1.00 / 4.00)} \sin(10.0 F0 tc (1.00 - t / tc)^{(5.00 / 8.00))), t, 0.00, tc)$
6	Image chirp1		chirp1	
7	Image chirp2		chirp2	
8	Fonction a	$a(x) = F0 / (1.00 - x / tc)^{(3.00 / 8.00)}$	$a(x) = 49.4 / (1.00 - x / 1.14)^{(3.00 / 8.00)}$	$a(x) = F0 / (1.00 - x / tc)^{(3.00 / 8.00)}$
9	Fonction g	$g(x) = \lg(a(x))$	$g(x) = \lg(49.4 / (1.00 - x / 1.14)^{(3.00 / 8.00)})$	$g(x) = \lg(a(x))$
10	Nombre xImage		xImage = -0.296	
11	Nombre yImage		yImage = 0.906	
12	Nombre Masse _t	$(3.47 * 10.0^{-2.00}) / (tc^{(3.00 / 5.00)} F0^{(8.00 / 5.00)} 4.93 * 10.0^{-6.00})$	$(3.47 * 10.0^{-2.00}) / (1.14^{(3.00 / 5.00)} 49.4^{(8.00 / 5.00)} 4.93 * 10.0^{-6.00})$	$(3.47 * 10.0^{-2.00}) / (tc^{(3.00 / 5.00)} F0^{(8.00 / 5.00)} 4.93 * 10.0^{-6.00})$
13	Nombre echellet		echellet = 1.80	

14	Nombre echellef		echellef = 3.00	
15	Nombre fimage		fimage = 3.25	
16	Nombre timage		timage = 1.85	
17	Image image1		image1	
18	Texte texte1	"Masse totale = " + Masse _t + " masses solaires"	"Masse totale = 12.7 masses solaires"	"Masse totale = " + Masse _t + " masses solaires"
19	Nombre t0		t0 = 0.00	
20	Point B	(xImage + t0, yImage + echellef)	(xImage + t0, yImage + echellef)	(xImage + t0, yImage + echellef)
21	Point C	(xImage + t0, yImage)	(xImage + t0, yImage)	(xImage + t0, yImage)
22	Point D	(xImage + echellef + t0, yImage)	(xImage + echellef + t0, yImage)	(xImage + echellef + t0, yImage)
23	Nombre couple		couple = -0.860	
24	Point CoupleF0tc	(couple, g(couple))	CoupleF0tc = (-0.860, 1.60)	(couple, g(couple))
25	Nombre F0couple	a(couple)	F0couple = 40.0	a(couple)
26	Nombre tccouple	tc - couple	tccouple = 2.00	tc - couple
27	Texte texte2	"(tc=" + tccouple + ",F0=" + F0couple + ")"	"(tc=2.00,F0=40.0)"	"(tc=" + tccouple + ",F0=" + F0couple + ")"

Michelson Arago

Olympiades 2019



No.	Nom	Description	Définition	Valeur
1	Nombre fréquence			fréquence = 0.1
2	Nombre a			a = -10
3	Point A	(a, 1)	(a, 1)	A = (-10, 1)
4	Point B	(a, -1)	(a, -1)	B = (-10, -1)
5	Point C	(a - 3, -1)	(a - 3, -1)	C = (-13, -1)
6	Point D	(a - 3, 1)	(a - 3, 1)	D = (-13, 1)
7	Quadrilatère q1	Polygone A, B, C, D	Polygone(A, B, C, D)	q1 = 6
8	Segment a ₁	Segment [AB]	Segment(A, B, q1)	a ₁ = 2
9	Segment b ₁	Segment [BC]	Segment(B, C, q1)	b ₁ = 3
10	Segment c ₁	Segment [CD]	Segment(C, D, q1)	c ₁ = 2
11	Segment d ₁	Segment [DA]	Segment(D, A, q1)	d ₁ = 3
12	Nombre b			b = 1.18
13	Point E	(b, 2)	(b, 2)	E = (1.18, 2)
14	Point F	(b, -2)	(b, -2)	F = (1.18, -2)
15	Segment f ₁	Segment [EF]	Segment(E, F)	f ₁ = 4
16	Nombre c			c = 10
17	Point G	(-2, c)	(-2, c)	G = (-2, 10)
18	Point H	(2, c)	(2, c)	H = (2, 10)
19	Segment g	Segment [GH]	Segment(G, H)	g = 4
20	Nombre d			d = -10
21	Point I	(-1, d)	(-1, d)	I = (-1, -10)
22	Point J	(1, d)	(1, d)	J = (1, -10)
23	Point K	(1, d - 3)	(1, d - 3)	K = (1, -13)
24	Point L	(-1, d - 3)	(-1, d - 3)	L = (-1, -13)
25	Quadrilatère q2	Polygone I, J, K, L	Polygone(I, J, K, L)	q2 = 6
26	Segment i	Segment [IJ]	Segment(I, J, q2)	i = 2
27	Segment j	Segment [JK]	Segment(J, K, q2)	j = 3
28	Segment k	Segment [KL]	Segment(K, L, q2)	k = 2
29	Segment l	Segment [LI]	Segment(L, I, q2)	l = 3
30	Point M			M = (2.8, 2.2)
31	Point N			N = (-2.8, -2.2)
32	Nombre amp			amp = 1
33	Nombre f	2π fréquence	2π fréquence	f = 0.63
34	Nombre phi			phi = 2.75
35	Courbe ondeA	Courbe(t, amp sin(f t + phi), t, a, 0)	Courbe(t, amp sin(f t + phi), t, a, 0)	ondeA:(t, sin(0.63 t + 2.75))
36	Courbe ondeB	Courbe(t, 0.5amp sin(f t +	Courbe(t, 0.5amp sin(f t +	ondeB:(t, 0.5 sin(0.63 t

		$\phi), t, 0, b)$	$\phi), t, 0, b)$	+ 2.75))
37	Bouton Bouton1			Bouton1
38	Bouton Bouton2			Bouton2
39	Nombre vitesse			vitesse = 6.6
40	Courbe ondeB'	Courbe(-t + 2b, 0.5amp $\sin(f t + \phi), t, b, 2b)$	Courbe(-t + 2b, 0.5amp $\sin(f t + \phi), t, b, 2b)$	ondeB':(-t + 2 * 1.18, 0.5 $\sin(0.63 t + 2.75)$)
41	Courbe ondeC	Courbe(0.5amp $\sin(f t + \phi), t, t, 0, c)$	Courbe(0.5amp $\sin(f t + \phi), t, t, 0, c)$	ondeC:(0.5 $\sin(0.63 t + 2.75), t)$
42	Courbe ondeDC	Courbe(0.25amp $\sin(f t + \phi), -t + 2c, t, 2c, 2c - d)$	Courbe(0.25amp $\sin(f t + \phi), -t + 2c, t, 2c, 2c - d)$	ondeDC:(0.25 $\sin(0.63 t + 2.75), -t + 2 * 10)$
43	Courbe ondeC'	Courbe(0.5amp $\sin(f t + \phi), -t + 2c, t, c, 2c)$	Courbe(0.5amp $\sin(f t + \phi), -t + 2c, t, c, 2c)$	ondeC':(0.5 $\sin(0.63 t + 2.75), -t + 2 * 10)$
44	Courbe ondeAB	Courbe(-t + 2b, 0.25amp $\sin(f t + \phi), t, 2b, 2b - a)$	Courbe(-t + 2b, 0.25amp $\sin(f t + \phi), t, 2b, 2b - a)$	ondeAB:(-t + 2 * 1.18, 0.25 $\sin(0.63 t + 2.75)$)
45	Courbe ondeAC	Courbe(-t + 2c, 0.25amp $\sin(f t + \phi), t, 2c, 2c - a)$	Courbe(-t + 2c, 0.25amp $\sin(f t + \phi), t, 2c, 2c - a)$	ondeAC:(-t + 2 * 10, 0.25 $\sin(0.63 t + 2.75)$)
46	Courbe ondeDB	Courbe(0.25amp $\sin(f t + \phi), -t + 2b, t, 2b, 2b - d)$	Courbe(0.25amp $\sin(f t + \phi), -t + 2b, t, 2b, 2b - d)$	ondeDB:(0.25 $\sin(0.63 t + 2.75), -t + 2 * 1.18)$
47	Point O			O = (-2.2, -2.8)
48	Point P			P = (2.2, 2.8)
49	Quadrilatère q3	Polygone N, P, M, O	Polygone(N, P, M, O)	q3 = 6
50	Segment n	Segment [NP]	Segment(N, P, q3)	n = 7.07
51	Segment p	Segment [PM]	Segment(P, M, q3)	p = 0.85
52	Segment m	Segment [MO]	Segment(M, O, q3)	m = 7.07
53	Segment o	Segment [ON]	Segment(O, N, q3)	o = 0.85
54	Nombre e			e = π
55	Point U	Intersection de i et ondeDC	Intersection(i, ondeDC)	U = (0.1, -10)
56	Nombre XS			XS = 13.22
57	Bouton Bouton3			Bouton3
58	Texte texte1			"Addition des ondes en fonction du temps"
59	Nombre R1			R1 non défini
60	Point Q	Intersection de i et ondeDB	Intersection(i, ondeDB)	Q = (-0.22, -10)
61	Point S ₁ (13.22, -8.67)	(XS, 3x(Q) - 8)	(XS, 3x(Q) - 8)	S ₁ = (13.22, -8.67)
62	Point S	(XS, 3 (x(Q) + x(U)) - 8)	(XS, 3 (x(Q) + x(U)) - 8)	S = (13.22, -8.38)
63	Point S ₂ (13.22, -7.71)	(XS, 3x(U) - 8)	(XS, 3x(U) - 8)	S ₂ = (13.22, -7.71)